प्रस्तावना

भारत की स्वतन्त्रता के बाद इसकी राष्ट्रभाषा को विश्वविद्यालय शिक्षा के माध्यम के रूप में प्रतिष्ठित करने का प्रश्न राष्ट्र के सम्मुख था। किन्तु हिन्दी में इस प्रयोजन के लिए अपेक्षित उपयुक्त पाठ्यपुस्तकें उपलब्ध नहीं होने से यह माध्यम-परिवर्तन नहीं किया जा सकता था। परिणामतः भारत सरकार ने इस न्यूनता के निवारण के लिए 'वैज्ञानिक तथा पारिभाषिक शब्दावली आयोग' की स्थापना की थी। इसी योजना के अन्तर्गत पीछे १९६९ में पांच हिन्दी भाषी प्रदेशों में ग्रन्थ अकादमियों की स्थापना की गयी।

राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी हिन्दी में विश्वविद्यालय स्तर के उत्कृष्ट ग्रन्थ-निर्माण में राजस्थान के प्रतिष्ठित विद्वानों तथा अध्यापकों का [illegible] प्राप्त कर रही है और मानविकी तथा विज्ञान के प्राय सभी क्षेत्रों में [illegible] पाठ्य-ग्रन्थों का निर्माण करवा रही है। अकादमी चतुर्थ पंचवर्षीय योजना के अन्त तक तीन सौ से भी अधिक ग्रन्थ प्रकाशित कर सकेगी, ऐसी [illegible] आशा करते हैं प्रस्तुत पुस्तक इसी क्रम में तैयार करवायी गयी है। हमें [illegible] है कि यह अपने विषय में उत्कृष्ट योगदान करेगी।

चन्दनमल बैद
अध्यक्ष

स० ही० वात्स्यायन
निदेशक

भूमिका

भारतीय विश्वविद्यालयो के पाठ्यक्रमो मे अब सदिश–विश्लेषण को बहुत महत्त्वपूर्ण स्थान दिया जा रहा है । राजस्थान विश्वविद्यालय मे भी, इस विषय को टी० डी० सी० प्रथम वर्ष के पाठ्य-क्रम मे रखा गया है । हिन्दी के माध्यम से अवर-स्नातक स्तर पर गणित का अध्ययन करने के लिए उचित पुस्तको के अभाव की पूर्ति के उद्देश्य से यह पुस्तक लिखी गई है; और प्राय भारत मे सभी विश्वविद्यालयो के अवर-स्नातक स्तर के पाठ्य-क्रम के लिए पर्याप्त है ।

विद्यार्थियो एवम् शिक्षको की सुविधा का ध्यान रखते हुए त्रिकोण-मितीय अनुपात, अंक और सदिश-चिह्नों के अंग्रेजी नामो का ही प्रयोग किया गया है । परिवर्तन काल मे गणितीय-स्तर को नीचे न गिरने देने के लिए यह आवश्यक है कि अंग्रेजी शब्दावली का पूर्ण बहिष्कार न किया जाय । अनुवाद के लिए केन्द्रीय हिन्दी निदेशालय, शिक्षा विभाग, भारत सरकार द्वारा प्रकाशित "अंग्रेज़ी–हिन्दी पारिभाषिक शब्द-संग्रह" का प्रयोग किया गया है । मानक पदो के हिन्दी-अनुवाद के साथ-साथ अंग्रेज़ी तुल्य भी लिखे गए है ।

राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, जयपुर ने पुस्तक रचना की जो प्रेरणा दी है उसके लिए मैं उसका आभारी हूँ । साथ ही मैं उन सभी लेखको का भी आभारी हूँ जिनकी मानक रचनाओ का इस पुस्तक सकलन में मैंने स्वच्छंदता से उपयोग किया है । पुस्तक की हिन्दी लिपि के अवलोकन में सह-योग के लिए श्रीमती ललिता व्यास, वरिष्ठ व्याख्याता मा० सु० महाविद्यालय, बीकानेर के प्रति भी मैं आभार प्रकट करता हूं ।

डॉ० बी० आर० लूथरा

विषय सूची

अध्याय 1

पृष्ठ

सदिशों का निरूपण और विघटन 1

1.1 सदिश और अदिश राशियां 1

1.2 सदिश का निरूपण करना 1

1.3 कुछ परिभाषाएं 2

1.4 दो सदिशों के बीच का कोण 4

1.5 सदिशों का योग 4

1.6 सदिश-योग का क्रमविनिमेय नियम 5

1.7 साहचर्य-नियम 6

1.8 सदिशों का व्यवकलन 7

1.9 सदिश का किसी वास्तविक अंक से गुणन 7

1.10 सदिशों के गुण 9

1.11 व्युत्क्रम-सदिश 10

1.12 स्थिति-सदिश 11

1.13 दो बिन्दुओं को मिलाने वाली सीधी रेखा को दिए हुए अनुपात में विभाजित करने वाला बिन्दु ज्ञात करना 11

1.14 समरेख-बिन्दु 13

1.15 समतलीय-सदिश 14

1.16 असमतलीय-सदिश 15

1.17 सदिश का विघटन 28

1.18 दिक्कोज्या 30

1.19 किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना और उनको मिलाने वाली रेखा के दिक्कोज्या ज्ञात करना 31

1.20 दो सदिशों के बीच का कोण ज्ञात करना 31

अध्याय 2

केन्द्रक तथा प्रारम्भिक भौतिक अनुप्रयोग 38

2.1 केन्द्रक 38

2.2 सहृति केन्द्रक । 40
2.3 स्थिति-सदिशो मे एकघात-सम्बन्ध । 41
2.4 कुछ साधारण भौतिक ग्रनुप्रयोग । 43

ग्रध्याय 3

सरल रेखा ग्रौर समतल के सदिश-समीकरण 59
3 1 परिचय 59
3.2 सरल रेखा का समीकरण 59
3 3 सदिश समीकरण से कार्तीय समीकरण ज्ञात करना 61
3 4 तीन सदिश एक ही रेखा पर समाप्त हो । 62
3.5 दो रेखाग्रो के बीच के कोण का ग्रर्धक ज्ञात करना 63
3 6 समतल का सदिश-समीकरण ज्ञात करना 78
3.7 ग्रावश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध कि चार बिन्दु समतलीय हो 81

ग्रध्याय 4

दो सदिशो का गुणनफल 91
4.1 परिचय 91
4.2 ग्रदिश-गुणनफल 91
4 3 ग्रदिश-गुणनफल के गुण 92
4.4 लाम्बिक-सदिश त्रयी । 94
4.5 सदिशो का ग्रदिश-गुणनफल बटन-नियम का पालन करता है 94
4 6 बटन-नियम का व्यापकीकरण 96
4 7 ग्रदिश-गुणनफल को घटको मे ग्रभिव्यक्त करना 97
4.8 स्वेच्छ ग्राधार 99
4.9 सदिश-गुणनफल या वज्रीय गुणनफल 110
4.10 सदिश-गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या (सदिश-क्षेत्रफल) 110
4 11 एक महत्वपूर्ण सम्बन्ध 112
4.12 सदिश-गुणनफल के गुण 112
4 13 लवप्रसामान्यक त्रयी 116
4.14 सदिश-गुणनफल को घटको मे ग्रभिव्यक्त करना 116
4.15 यान्त्रिकी मे ग्रनुप्रयोग 123
4.16 बल द्वारा किया गया कार्य 124

4.17 बल का घूर्ण या ऐंठ 125
4.18 किन्ही बलो का घूर्ण 126
4 19 किसी बल का किसी रेखा की अपेक्षा घूर्ण 126
4.20 दृढ़ वस्तु का कोणीय-वेग 128

अध्याय 5

तीन और चार सदिशो का गुणनफल 135
5 1 परिचय 135
5.2 त्रिक-प्रदिश-गुणनफल 135
5.3 अदिश-त्रिक-गुणनफल को घटकों मे अभिव्यक्त करना 137
5.4 प्रतिबन्ध कि तीन सदिश समतलीय हो 139
5.5 सदिश-त्रिक-गुणनफलक 139
5 6 सदिश के घटक 141
5.7 चार सदिशों का अदिश-गुणनफल 146
5.8 चार सदिशों का सदिश-गुणनफल 146
5.9 व्युत्क्रम-सदिशो की पद्धति 148
5 10 दो उपयोगी विघटन 150

अध्याय 6

ज्यामितीय अनुप्रयोग 157
6.1 परिचय 157
6.2 समतल का समीकरण अभिलम्ब रूप मे 157
6.3 समतल के समीकरणों के कार्तीय तुल्य 160
6 4 दो समतलो के बीच का कोण 161
6.5 अक्षों पर अंतः खण्ड ज्ञात करना 161
6 6 किसी बिन्दु की समतल से दूरी 162
6.7 दो समतलो के बीच के कोण को समद्विभाग करने वाले समतलों के समीकरण ज्ञात करना 164
6.8 दो समतलो की प्रतिच्छेद-रेखा मे से हो कर जाने वाले समतलो का समीकरण 164
6.9 सरल-रेखा का समीकरण 165
6 10 बिन्दु P की दी हुई सरल-रेखा से लम्बवत दूरी ज्ञात करना 166

6 11 दो सरल-रेखाओं के प्रतिच्छेदन करने का प्रतिबन्ध। या दो सरल-रेखाओं के समतलीय होने का प्रतिबन्ध 167
6 12 दो अप्रतिच्छेदी-सरल-रेखाओं के बीच न्यूनतम-दूरी 167
6 13 चतुष्फलक का आयतन 178
6 14 किसी चतुष्फलक के सम्मुख किनारों के उभयनिष्ठ अभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात करना 179
6.15 गोले का समीकरण 180
6 16 एक गोले और सरल-रेखा का प्रतिच्छेदन ज्ञात करना 181
6 17 गोले पर स्पर्श-समतल 183
6 18 समतल गोले को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध 183
6 19 दो गोलों के एक दूसरे को समकोण पर काटने का प्रतिबन्ध 184
6 20 ध्रुवीय-समतल 185

अध्याय 7

सदिशों का अवकलन और समाकलन 193
7 1 परिचय 193
7.2 किसी सदिश का अवकलन 193
7.3 तात्कालिक वेग और त्वरण 195
7.4 कुछ मानक रूपों का अवकलन 196
7 5 अवकलन विशेष स्थिति में 198
7.6 सदिश r के अवकलज का कार्तीय तुल्यांक 199
7.7 समाकलन 200
7.8 कुछ मानक परिणाम 201
7 9 किसी वक्र पर दिये हुए एक बिन्दु पर स्पर्श-रेखा ज्ञात करना 201

सदिशों का निरूपण और विघटन

1·1 सदिश और अदिश राशियाँ (Vactor and Scalar Quantities)–

अदिश राशि (संक्षेप मे अदिश) का केवल परिमाण होता है, इसका अवकाश (Space) मे किसी दिशा विशेष से संबंध नही होता। अदिश के उदाहरण सहति, आयतन, घनत्व, ताप विद्युत् आवेश और विभव इत्यादि हैं। अदिश राशि को उल्लिखित करने के लिए हमे केवल राशि के प्रकार की इकाई मात्र की ही आवश्यकता होती है और दी हुई राशि तथा उस इकाई के अनुपात की सख्या की, जिसको माप (measure) भी कहते हैं। अत जब हम कहते हैं कि वस्तु का आयतन 1000 घ. सें है, तो उसका यह अभिप्राय होता है कि इस वस्तु का आयतन उस घन के आयतन के समान होगा जिसकी भुजा 10 सें. है। इसमें दिशा की कोई आवश्यकता नहीं।

सदिश राशि :–सदिश राशि, (संक्षेप मे सदिश) का परिमाण होता है और अवकाश में इसका किसी निश्चित दिशा के साथ संबंध होता है। विस्थापन, गति, त्वरण, विद्युतीय तथा चुम्बकीय क्षेत्र सदिश राशि के उदाहरण हैं। किसी सदिश को उल्लिखित करने के लिए हमे न केवल इकाई और सख्या जो उस राशि का मापांक है, की आवश्यकता होती है, अपितु उसकी दिशा के विवरण की भी। अतः यदि हम कहते हैं कि किसी वस्तु पर 10 पौंड भार कार्य कर रहा है तो यह विवरण अपूर्ण होगा जबतक बल के कार्य करने की दिशा का विवरण न हो। इसी प्रकार यदि दो वस्तु अवकाश मे बराबर चाल से, किन्तु विभिन्न दिशाओं मे चल रही हैं या एक ही दिशा में विभिन्न चाल मे चल रही हैं तो दोनो अवस्थाओं मे उनकी गति भिन्न भिन्न होगी। सदिश राशि को पूर्ण रूप से उल्लिखित करने के लिए उसके परिमाण के साथ-साथ दिशा-बोध का ज्ञान भी आवश्यक है।

वास्तविक तथा सम्मिश्र संख्यायें स्वयं अदिश हैं। परन्तु सदिश एक दिष्ट-सख्या (directed number) है।

1·2 सदिश का निरूपण करना (Representation of a Vector)–

चूँकि एक परिमित सरल-रेखा का परिमाण और दिशा भी होती है, इसलिए किसी सदिश को एक सरल रेखा द्वारा निरूपित किया जा सकता है। रेखा की दिशा को शर-चिह्न द्वारा सूचित किया जाता है।

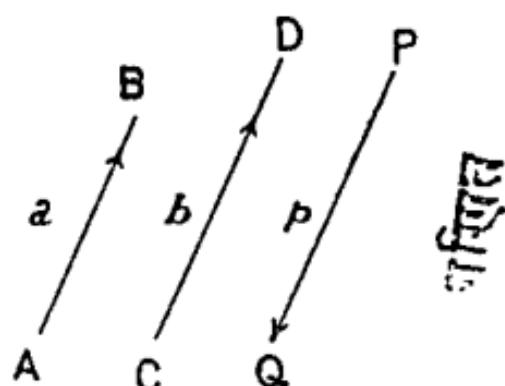
माना अवकाश (space) मे एक स्वेच्छ विन्दु O है तथा P एक और विन्दु है। रेखा OP को खीचो और विन्दु P पर शर चिह्न लगा दो। ऐसी दिष्ट-रेखा का खण्ड सदिश को निरूपित करता है इसको प्रायः $\overrightarrow{OP}$ लिखा जाता है और "सदिश OP" पढा जाता है। सामने चित्र न. 1 मे तीर का पिछला सिरा (tail) O मूलविन्दु या प्रारम्भिक विन्दु कहलाता है और शर-अग्र P सदिश OP का अन्तिम विन्दु (terminous) कहलाता है। रेखा OP की लम्बाई किसी निश्चित पैमाने मे सदिश का परिमाण बताती है और O से P की ओर रेखा की दिशा, सदिश की दिशा बताती है। ऐसे सदिश को (Line Vector) रेखीय-सदिश भी कहते हैं। सुविधा के लिए सदिश को प्राय. क्लैरेन्डन (Clarendon) चिह्न, अर्थात् मोटे प्रकार की लिपि **a**, **b**, **c**....द्वारा बताया जाता है। और इसका परिमाण तदनुरूपी तिरछी टाइप लिपि a, b, c द्वारा बताया जाता है। अत सदिश

$\overrightarrow{OA}$ को **a** या $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ द्वारा अभिव्यक्त किया जाता है।

1·3 कुछ परिभाषाएँ (Some Definitions)–

(1) सदिश का मापांक (Modulus of a Vector) –किसी सदिश का मापाक या परिमाण एक धन अंक है जोकि इसको अभिव्यक्त करने वाली रेखा की लम्बाई का माप है। सदिश a का मापाक चिह्न $|\mathbf{a}|$ द्वारा बताया जाता है या तदनुरूपी तिरछा टाइप वर्ण (Italics) a द्वारा बताया जाता है।

(2) इकाई सदिश (Unit Vector) –वह सदिश है जिसका मापाक इकाई है। a की दिशा मे इकाई सदिश $\hat{\mathbf{a}}$ से भी सूचित किया जाता है। अतः $\mathbf{a}=a\,\hat{\mathbf{a}}$ या $\hat{\mathbf{a}}=\dfrac{\mathbf{a}}{a}$ जबकि a सदिश **a** का मापाक है।

(3) समरेख-सदिश (Collinear Vectors):–वह सब सदिश जिनके रेखीय खण्ड (line segments) समानान्तर हैं (बिना उनकी दिशा और परिमाण के विचार के) समरेख सदिश कहलाते हैं, जैसे चित्र मे $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{CD}$, $\mathbf{p}=\overrightarrow{PQ}$ तीनो समरेख सदिश है, क्योंकि उनके रेखा-खण्ड समानान्तर हैं।

(4) स्वतन्त्र तथा स्थानीकृत-सदिश (Free and Localized Vectors):–ऐसा सदिश जिसका मूलबिन्दु अवकाश मे किसी भी स्वेच्छ बिन्दु पर लिया जा सकता है; स्वतन्त्र-सदिश कहलाता है। यदि मूलबिन्दु पर प्रतिवन्ध लगाया जाय और सदिश का रेखीय-खण्ड अवकाश मे किसी निश्चित बिन्दु में से गुजरता है तो वह सदिश स्थानीकृत-सदिश कहलाता है। किसी सदिश के भौतिक प्रभाव अवकाश मे उसकी स्थिति पर निर्भर करते है, जैसे किसी वस्तु पर कार्य कर रहे बल का प्रभाव उसकी कार्य-दिशा पर निर्भर करता है।

(5) सजातीय-सदिश (Like Vectors):-वे समरेख-सदिश जिनकी दिशा भी समान होती है, सजातीय सदिश कहलाते हैं। ऊपर चित्र मे $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$ सजातीय-सदिश हैं और $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{PQ}$ विजातीय सदिश है।

(6) समान-सदिश (Equal Vectors):–दो सदिश **a** और **b** समान होंगे यदि और केवल यदि (iff) वह समानान्तर हैं और उनकी दिशा व परिमाण भी समान हैं। (सदिशो के प्रारम्भ के बिन्दु चाहे भिन्न भी हो) अत: यदि AB, CD समानान्तर रेखाएँ हैं और AB=CD तो

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

(7) शून्य-सदिश (Null Vector):–वह सदिश जिसका प्रारम्भिक और अन्तिम सिरा एक दूसरे पर सपाती हो, शून्य-सदिश कहलाता है। यह

स्पष्ट है कि शून्य सदिश का परिमाण शून्य होता है; और उसकी दिशा अनिर्धारित होती है, अर्थात् उसकी कोई भी दिशा हो सकती है। सब शून्य-सदिश समान होते हैं। शून्य-सदिश को मोटे टाइप,

$$O \text{ या } \overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$$

द्वारा निरूपित किया जाता है। शून्य-सदिश को छोड़ अन्य सदिशो को उचित (Proper) सदिश भी कहते है।

(8) ऋण सदिश (Negative Vector)-वह सदिश जिसका परिमाण सदिश **a** के समान हो परन्तु उसकी दिशा **a** की दिशा के विपरीत हो तो वह **a** का ऋण-सदिश कहलाता है। इसको हम − **a** लिखते हैं।

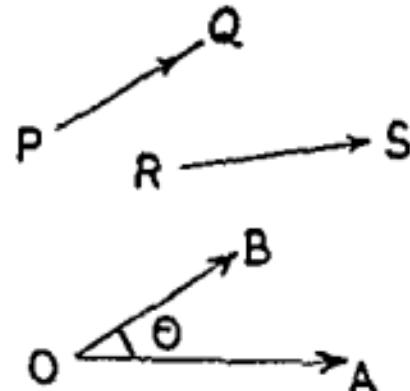
(9) समतलीय-सदिश (Coplanar Vector)-तीन या तीन से अधिक सदिश समतलीयसदिश कहलाते हैं, यदि वह एक ही समतल के समानान्तर हो। कोई भी समतल जो इस समतल के समानान्तर है, सदिश समतल कहलाता है।

1·4 दो सदिशो के बीच का कोण (Angle between two Vectors)-

माना $\overrightarrow{PQ}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{RS}=\mathbf{b}$ दो सदिश हैं। मूलबिन्दु O से OA और OB दो रेखायें PQ और RS के समानान्तर खीची तो $\angle AOB$ (θ) सदिश **a** और **b** के बीच का कोण कहलाता है यदि

$0 \leq \theta \leq \pi$

$\theta = 0$ या π हो तो सदिश समातर होंगे।

(सजातीय जब $\theta = 0$, और विजातीय जब $\theta = \pi$)

यदि $\theta = \frac{\pi}{2}$ तो सदिश एक दूसरे के लम्बवत होंगे।

1·5 सदिशों का योग (Addition of Vectors)-

सदिश राशियो का योग त्रिभुज के नियम से किया जाता है जिसका वर्णन निम्न प्रकार है :

यदि तीन बिन्दु O,A,C इस प्रकार लिए जाए कि

$\vec{OA} = a$ और $\vec{AC} = b$

और b का प्रारम्भिक सिरा a का अन्तिम सिरा हो तो सदिश $\vec{OC}$ सदिश a और b का परिणामित या सदिश-योग होगा

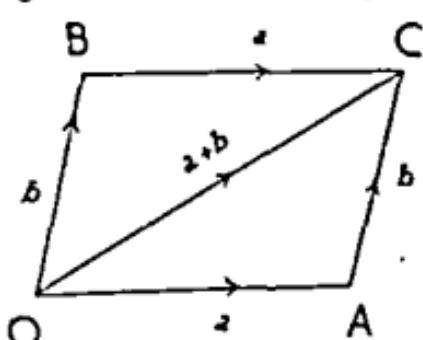
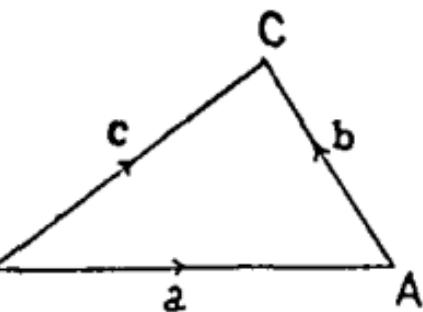
$$\vec{OC} = C = a + b$$

यह योग O की स्थिति से स्वतन्त्र होता है। सदिश $\vec{OC}$, $\vec{OA}$ और $\vec{AC}$ दोनों सदिशों का संयुक्त प्रभाव निरूपित करता है। + के चिह्न का अभिप्राय अंकगणितीय योग से नहीं, सिवाय जब O,A,C समरेख हो।

OA और AC को आसन्न भुजाएं मान कर समातर-चतुर्भुज OACB खींचो। तब

$$\vec{OA} = \vec{BC} = a$$

और $\vec{OB} = \vec{AC} = b$

$$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

इससे स्पष्ट है कि सदिश

$a = \vec{OA}$, $b = \vec{OB}$ का योग सदिश $\vec{OC}$ है जोकि उस समानान्तर चतुर्भुज का विकर्ण है जो OA, और OB को आसन्न भुजाएं मानकर बनाया जाय। अतः हम देखते हैं कि योग का त्रिभुज का नियम, बलों के समान्तर चतुर्भुज के नियम के सर्वसम है।

1·6 सदिश-योग का क्रमविनिमेय नियम (Commutative Law of Vector Addition)–चित्र नं० 1·5 में,

$$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$$

सदिश **a** और एक वास्तविक संख्या m का गुणनफल एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण **a** के परिमाण का $|m|$ गुना है, और इसकी दिशा **a** ही की दिशा होती है, इसको m**a** से निर्दिष्ट किया जाता है।

सदिश m**a**, अदिश राशि m की सदिश **a** से अदिश-गुणन कहलाती है।

सदिश **a** का अदिश m से विभाजित करने की परिभाषा **a** को $\frac{1}{m}$ ($m \neq O$) से गुणन करना है। अत. यदि **e** एक **a** की दिशा मे इकाई सदिश है तो $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{a}$, और यदि **b** एक सदिश **a** के समानान्तर है तो

$$\frac{\mathbf{b}}{b} = \pm \frac{\mathbf{a}}{a}$$

चिह्न + यदि **b**, **a** की दिशा मे है और − यदि वह विपरीत दिशा मे है।

यदि दो सदिश (शून्य रहित) समानान्तर हैं तो हम s एक ऐसा अदिश प्राप्त कर सकते हैं कि—

$$\mathbf{a} = s\,\mathbf{b}. \qquad \dots (1)$$

विलोमत. यदि दो सदिशो मे (1) के रूप का संबंध हो तो दोनो सदिश एक दूसरे के समानान्तर होंगे।

(1) से स्पष्ट है कि **a** और **b** के बीच एकघात सबंध है, या **a** और **b** एकघाततः आश्रित हैं। और यदि (1) के प्रकार का सबंध उन मे नही है तो वे एकघातत. स्वतंत्र होंगे। अत.

दो शून्य रहित सदिश यदि समानान्तर हो तो उसके लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि वे एकघाततः आश्रित हो।

व्यापक रूप से यदि तीन या अधिक सदिशो के बीच

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} + \dots = 0 \qquad \dots (2)$$

($x, y, z \dots$ अदिश हैं और सब शून्य नही हैं)

उपर्युक्त प्रकार का सबंध विद्यमान है तो सदिशो **a**,**b**,**c**⋯की पद्धति एकघातत. आश्रित कहलाती है। और यदि वह एकघाततः स्वतन्त्र हों तो

$$x = y = z = \dots\dots = 0. \qquad \dots (3)$$

1·10 सदिशों के गुण (Properties of Vectors)

1. सदिश का अदिश से गुणन की क्रिया साहचर्य नियम का पालन करती है। क्योंकि

$$m(n\mathbf{a})=mn\mathbf{a}=n(m\mathbf{a}).$$

2. सदिश का अदिश से गुणन की क्रिया बंटन (Distributive) के नियम का पालन करती है। अर्थात्

$$(m+n)\mathbf{a}=m\mathbf{a}+n\mathbf{a}. \qquad \cdots (1)$$

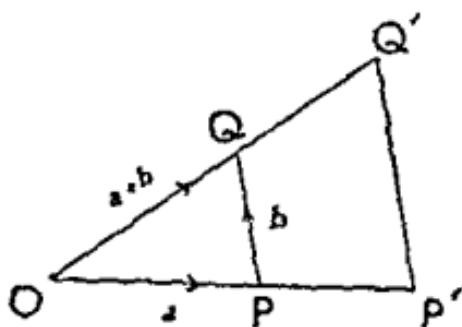
$$m(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+m\mathbf{b}. \qquad \cdots (2)$$

सम्बन्ध (1) तो सदिश की अदिश से गुणन की परिभाषा से ही स्पष्ट है।

सम्बन्ध (2) को निम्न रूप से सिद्ध कर सकते हैं

माना $\overrightarrow{OP}=\mathbf{a}$ और $\overrightarrow{PQ}=\mathbf{b}$. $\cdots (1)$

तो $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. $\cdots (2)$

माना P′, Q′, OP और OQ पर दो ऐसे विन्दु हैं कि

$$\frac{OP'}{OP}=\frac{OQ'}{OQ}=m. \qquad \cdots (3)$$

(चित्र में m धन है)

(3) से स्पष्ट है कि रेखा P′Q′, PQ के समानान्तर है। क्योंकि त्रिभुज OPQ और OP′Q′ अनुरूप हैं।

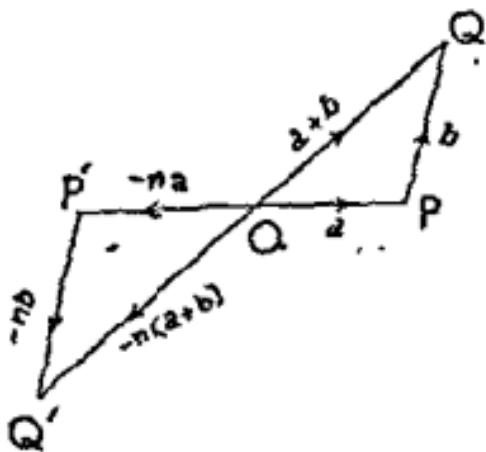
$\therefore\ \overrightarrow{P'Q'} = m\overrightarrow{PQ} = m\mathbf{b}$. ....(4)

अब $\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'Q'}$, ...(5)

या (3), (4) और (5) से

$m\,\overrightarrow{OQ} = m\overrightarrow{OP} + m\overrightarrow{PQ}$.

या $m\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$ ... (6)

चित्र नं० 2 मे m ऋण है ($m = -n$) तो P′ और Q′ बिन्दु

PO और QO पर इनको बढाकर लिए गए है।

परन्तु दोनो ही स्थितियो मे

$m(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$.

1·11 व्युत्क्रम सदिश (Reciprocal Vector)

वह सदिश जो सदिश **a** के समानान्तर है परन्तु इसका परिमाण **a** के परिमाण के व्युत्क्रम हो तो वह **a** का व्युत्क्रम सदिश (Reciprocal Vector) कहलाता है; और इसको 1 **a** लिखा जाता है। अत: यदि $\hat{\mathbf{a}}$, **a** की दिशा मे इकाई–सदिश है तो

$\mathbf{a} = a.\ \hat{\mathbf{a}}$,

तब $\frac{1}{\mathbf{a}} = \frac{1}{a}\,\hat{\mathbf{a}} = \frac{\hat{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|}$.

यह स्पष्ट है कि इकाई सदिश का व्युत्क्रम-सदिश स्वयं इकाई सदिश ही है। इसलिये इकाई-सदिश स्वत –व्युत्क्रम (Self reciprocal) सदिश है।

1·12 स्थिति-सदिश (Position Vectors)

यदि O एक नियत मूल-विन्दु है तो किसी बिन्दु P की स्थिति अद्वितीय रूप से सदिश $\overrightarrow{OP}$ द्वारा अभिव्यक्त की जा सकती है। $\overrightarrow{OP}$, P विन्दु का O के सापेक्ष स्थिति-सदिश कहलाता है। अत. P का O के सापेक्ष स्थिति-सदिश एक ऐसा सदिश है जिसका प्रारम्भिक विन्दु तो O है और अन्तिम बिन्दु (Terminal Point) P है। जिन सदिशों का एक ही प्रारम्भिक बिन्दु होता है वह सह-प्रारम्भिक-सदिश (Co-initial) कहलाते है। यदि हमें मूल-विन्दु O दिया हुआ हो, तो अवकाश मे किसी भी बिन्दु P के साथ हम सदिश $\overrightarrow{OP}$ ($=\mathbf{r}$) का सम्बन्ध जोड सकते हैं। विलोमतः हमे यदि कोई सदिश दिया हुआ है तो मूल-विन्दु O के सापेक्ष हम एक बिन्दु P ऐसा अवकाश मे ज्ञात कर सकते है कि $\overrightarrow{OP}$ दिये हुए सदिश को अभिव्यक्त करता है। इस प्रकार युक्लीडीयन (Euclidean) अवकाश मे प्रत्येक विन्दु के साथ एक सदिश का सम्बन्ध जोड़ने से उपलब्ध सदिशों की पद्धति को सदिश–क्षेत्र (Vector field) कहते हैं।

सुविधा के लिये बिन्दुओं A,B,C ... के स्थिति-सदिशों को मोटे टाइप के चिह्नों कलैरेन्डन (Clarendon) लिपि के वर्णों **a**,**b**,**c** ...द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। अतः सदिश

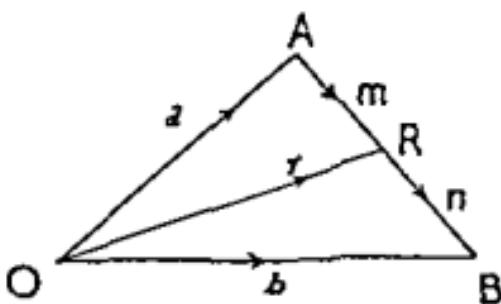
$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

क्योंकि–

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

(नीचे अनुच्छेद 1·13 के चित्र मे देखें)

1·13 दो विन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करने वाले विन्दु को ज्ञात करना (To find the Point which divides the join of two points in a given ratio $m : n$)

माना मूल-विन्दु O के सापेक्ष विन्दु A और B के स्थिति-सदिश क्रमश: a और b हैं अर्थात्

$\vec{OA}=\mathbf{a}$, $\vec{OB}=\mathbf{b}$.

माना विन्दु R, AB को $m:n$ के अनुपात में विभाजित करता है। और इसका स्थिति-सदिश r है। तो

$$\frac{AR}{BR}=\frac{m}{n}$$

या $n\,\vec{AR}=m\,\vec{RB}$. ... (1)

परन्तु $\vec{RB}=\vec{OB}-\vec{OR}$,
$=\mathbf{b}-\mathbf{r}$. ... (2)

और $\vec{AR}=\vec{OR}-\vec{OA}$.
$=\mathbf{r}-\mathbf{a}$. ... (3)

(1), (2) और (3) से

$n(\mathbf{r}-\mathbf{a})=m\,(\mathbf{b}-\mathbf{r})$.

या $(m+n)\,\mathbf{r}=n\mathbf{a}+m\mathbf{b}$.

या $\mathbf{r}=\dfrac{n\mathbf{a}+m\mathbf{b}}{m+n}$. $(m+n\neq O)$. (4)

विशेष स्थिति मे यदि $m=n$ तो

$\vec{OR}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. ....(5)

अर्थात् R, AB का मध्य-विन्दु है।

नोट :—यदि समीकरण (4) मे हम m और n को परस्पर बदल दें तो हमें $\frac{m\mathbf{a}+n\mathbf{b}}{m+n}$ सदिश प्राप्त होता है जो $\overrightarrow{OR}$ से भिन्न होगा जबतक $m=n$ के न हो।

माना बिन्दु C और D, AB को एक ही अनुपात $\lambda : 1$ मे अन्त-विभाजित और बाह्य विभाजित करते हैं और उनके स्थिति-सदिश: **c** और **d** हैं तो

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{\lambda+1}. \quad \text{....(6)}$$

$$\text{और } \mathbf{d} = \frac{\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}}{1-\lambda}. \quad \text{....(7)}$$

यदि समीकरण (6) और (7) मे से **a** और **b** का मान ज्ञात करें तो हम देखेंगे कि बिन्दु A और B खण्ड CD को $1-\lambda : 1+\lambda$ के अनुपात में विभाजित करते हैं। ऐसे बिन्दु A,B और C,D के युग्मों को हरात्मक संयुग्मी (Harmonic Conjugate) कहते हैं।

1·14 समरेख-विन्दु (Collinear points)

आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध, जिसमें तीन भिन्न बिन्दु R,A,B एक रेखस्थ हों, यह है कि हम तीन अदिश राशियां l,m,n (शून्य से भिन्न) ऐसी ज्ञात कर सकते हैं कि

$$l\mathbf{r}+m\mathbf{a}+n\mathbf{b}=0.$$

$$\text{और } l+m+n=0.$$

(*i*) प्रतिबन्ध आवश्यक है :—

माना R,A,B तीन समरेख बिन्दु हैं। माना R, AB को $n : m$ के अनुपात मे बांटता है। तो

$$(m+n)\ \mathbf{r}=m\mathbf{a}+n\mathbf{b}.$$

$$\text{या}-(m+n)\ \mathbf{r}+m\mathbf{a}+n\mathbf{b}=0.$$

अर्थात् **r**, **a**, और **b** के गुणाकों का योग शून्य है।

(ii) प्रतिबन्ध पर्याप्त है

माना हमें दिया हुआ है कि

$l\mathbf{r}+m\mathbf{a}+n\mathbf{b}=0$, और

$l+m+n=0.$

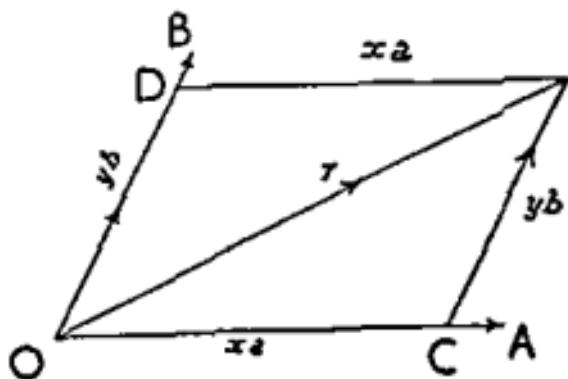
तो सिद्ध करना है कि **r**, **a**, **b** समरेख हैं।

उपर्युक्त सम्बन्ध से

$$\mathbf{r}=\frac{m\mathbf{a}+n\mathbf{b}}{-l}=\frac{m\mathbf{a}+n\mathbf{b}}{m+n}. \quad \cdots(1)$$

(1) से स्पष्ट है कि **r**, अर्थात् विन्दु R, A और B को मिलाने वाली रेखा को $n : m$ के अनुपात मे बाटता है। अत: **a**, **b** और **r** समरेख हैं।

1·15 समतलीय–सदिश: (Coplanar vectors)

कोई भी सदिश **r**, जो दिये हुए दो असमरेख सदिशो **a**, और **b** के साथ समतलीय है, वह एक मात्र विधि से दिये हुए सदिशो के एक-घात संचय मे अभिव्यक्त किया जा सकता है

माना $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ और $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ दो असमरेख-सदिश हैं और $\overrightarrow{OR}=\mathbf{r}$, **a**, **b** के समतल में कोई सदिश है। R मे से RC और RD दो सरल-रेखाएँ क्रमश: $\overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OA}$ के समानान्तर खीचो जो OA और OB को बिन्दु C और D पर मिलती हैं।

$\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ का समरेख है और $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}$ का।

$\therefore\ \overrightarrow{OC}=x\,\mathbf{a}.$

और $\overrightarrow{OD} = y\mathbf{b} = \overrightarrow{CR}$. $(x, y$ अदिश हैं)

परन्तु $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CR}$.

या $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$. ....(1)

$x\,\mathbf{a}$ और $y\,\mathbf{b}$, सदिश $\mathbf{r}$ के $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ की दिशाओं में घटक हैं। उपर्युक्त संचय (1) अद्वितीय है।

माना $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ एक अद्वितीय संचय नहीं है तो $\mathbf{r}$ को $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ के एक और भिन्न एकघात सम्बन्ध में अभिव्यक्त कर सकते हैं। जैसे

$\mathbf{r} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b}$. ... (2)

(1) और (2) से

$\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b}$.

या $(x - x')\mathbf{a} + (y - y')\mathbf{b} = 0$. ....(3)

यदि $x - x' \neq 0$ और $y - y' \neq 0$. तो

$\mathbf{a} = \dfrac{y' - y}{x - x'}\mathbf{b}$. ...(4)

या $\mathbf{a} = k\,\mathbf{b}$. $\left(k = \dfrac{y' - y}{x - x'}\right)$

अर्थात् $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ समरेख हैं जो कि परिकल्पना के विरुद्ध है। इसलिये

$x - x' = y - y' = 0$.

या $x' = x$ और $y' = y$.

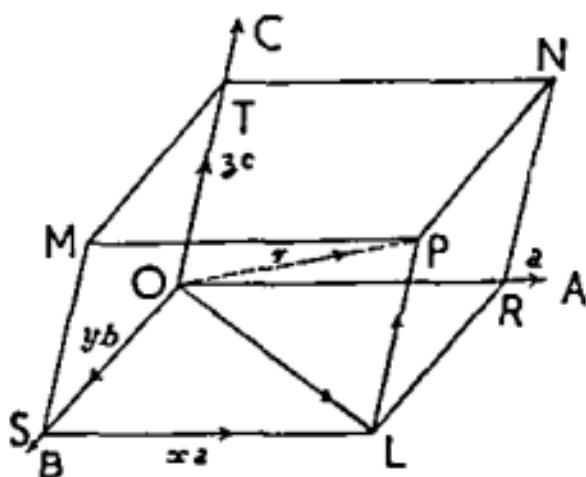
अतः सम्बन्ध (1) अद्वितीय है।

1·16 असमतलीय-सदिश (Non-Coplanar vectors)

कोई भी सदिश $\mathbf{r}$ किन्ही तीन असमतलीय-सदिशों $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ के एकघात सचय मे एक मात्र विधि से अभिव्यक्त किया जा सकता है -

माना $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ तीन असमतलीय-सदिश क्रमशः $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ है।

और $\overrightarrow{OP}$ एक और सदिश है और $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$.

विन्दु P मे से समतल BOC, COA और AOB के समानान्तर तीन

समतल खीचो जो OA, OB और OC को क्रमश: R,S,T पर मिलते हैं। इस प्रकार हम समानान्तर-फलक (parallelepiped) OSLRTMPN प्राप्त करते हैं जिसका विकर्ण OP है।

चूंकि $\overrightarrow{OR}$, सदिश $\overrightarrow{OA}$ के साथ समरेख है।

$$\therefore \ \overrightarrow{OR} = x\mathbf{a} = \overrightarrow{SL} \qquad \dots(1)$$

जबकि x एक अदिश राशि है।

इसी प्रकार

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{RL} = y\mathbf{b}. \qquad \dots(2)$$

$$\text{और} \ \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{LP} = z\mathbf{c}. \qquad \dots(3)$$

y, और z भी अदिश हैं।

$$\text{अब} \ \mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP}. \qquad \dots(4)$$

परन्तु $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SL}$.

$$\therefore \ \mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}. \qquad \dots(5)$$

$x\mathbf{a}$, $y\mathbf{b}$, और $z\mathbf{c}$, सदिश $\mathbf{r}$ के, OA, OB, OC की दिशाओं में घटक हैं।

सदिश $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ त्रिविमिनीय (3 – D) में आधार-सदिश (Base Vectors) कहलाते हैं।

उपर्युक्त संचय अद्वितीय है।

माना $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$

यह एक अद्वितीय सचय नही है तो इसको एक दूसरे सचय मे निम्न प्रकार से अभिव्यक्त कर सकते है।

$\mathbf{r} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$. ....(6)

(5) और (6) से

$\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$

या $(x - x')\,\mathbf{a} + (y - y')\,\mathbf{b} + (z - z')\,\mathbf{c} = 0$

यदि $x - x' \neq 0$, और $y - y' \neq 0$, $z - z' \neq 0$,

तो $\mathbf{a} = p\mathbf{b} + q\mathbf{c} \quad \left[p = \dfrac{y' - y}{x - x'} \quad q = \dfrac{z' - z}{x - x'} \right]$. (7)

अर्थात् $\mathbf{a}$ को $\mathbf{b}$ और $\mathbf{c}$ के एकघात सचय मे अभिव्यक्त कर सकते है इसलिये $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ और $\mathbf{c}$ समतलीय है जो कि परिकल्पना के विरुद्ध है। जबतक कि $p = q = 0$ न हो।

$\therefore y' - y = z - z' = 0$

या $y = y'$ और $z = z'$. इसी प्रकार $x = x'$.

अतः एकघात संचय (5) अद्वितीय है।

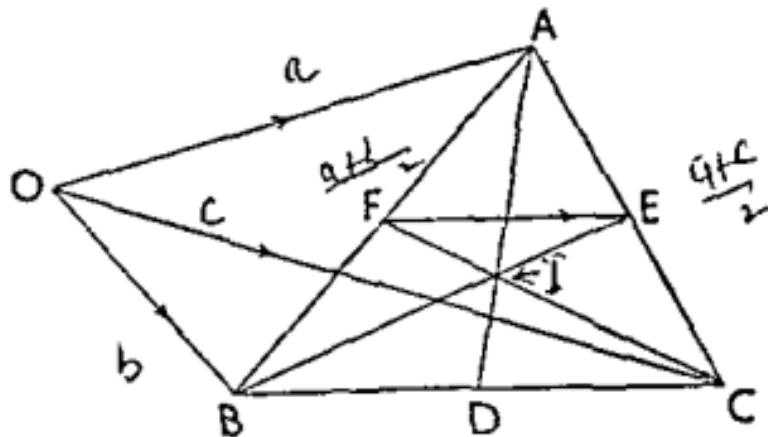
नोट :–यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ तीन असमतलीय सदिश हैं और उनमे निम्नलिखित प्रकार का सम्बन्ध विद्यमान हो—

$l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c} = 0$.

तो $l = m = n = 0$.

उदाहरण नं० 1

D, E, F त्रिभुज ABC की भुजा BC, CA, AB के क्रमशः मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध करो कि (i) $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; (ii) और सदिश $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ और $\overrightarrow{CF}$ का योग शून्य के बराबर है। (iii) और माध्यिकाएं एक ही बिन्दु पर मिलती हैं जो इनका समत्रिभाजन करता है। [Raj. '63]

माना A, B, C के स्थिति-सदिश (Position Vector) मूलबिंदु 0 के सापेक्ष क्रमश a, b, c हैं। और D, E, F; BC, CA, AB के मध्यबिंदु हैं।

E और F के स्थिति–सदिश

$\frac{a+c}{2}$, और $\frac{a+b}{2}$ होंगे।

$\therefore$ सदिश $\vec{FE} = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(c-b)$ ....(1)

सदिश $\vec{BC} = c - b$ ....(2)

(1) और (2) से

$\vec{FE} = \frac{1}{2}\vec{BC}$

(ii) सदिश $\vec{OD}$, $\vec{OE}$ और $\vec{OF}$ क्रमश

$\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, और $\frac{a+b}{2}$ है

$$\left.\begin{aligned}\therefore \vec{AD} &= \frac{b+c}{2} - a = \frac{b+c+2a}{2}\\ \vec{BE} &= \frac{c+a}{2} - b = \frac{c+a-2b}{2}\\ \vec{CF} &= \frac{a+b}{2} - c = \frac{a+b-2c}{2}\end{aligned}\right\} \quad ...(3)$$

(3) से

$\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF}=0.$

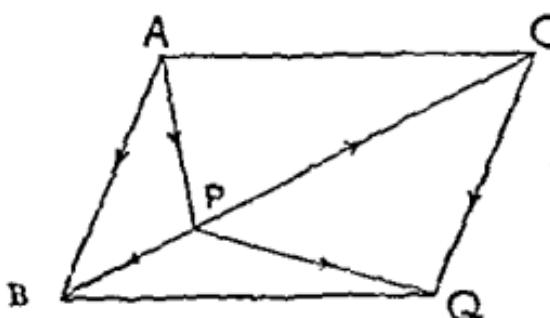
(iii) माना बिंदु I, $\vec{AD}$ को 2 : 1 अनुपात में विभाजित करता है। तो I बिंदु का स्थिति-सदिश = 2/1

$$=\frac{1.a+2.\frac{(b+c)}{2}}{3}=\frac{a+b+c}{3}$$

सममिति से हम ज्ञात कर सकते हैं कि $\vec{BE}$ और $\vec{CF}$ को 2 : 1 के अनुपात में बाटने वाले बिन्दुओं के स्थिति-सदिश भी

$\frac{a+b+c}{3}$ होंगे।

अतः बिन्दु I तीनों माध्यिकाओं पर स्थित है।

2. ABC एक त्रिभुज है और भुजा BC में P कोई बिन्दु है। यदि $\vec{PQ}$ सदिश $\vec{AP}$, $\vec{PB}$, $\vec{PC}$ का परिणामित हो तो सिद्ध करो कि ABQC एक सामानान्तर चतुर्भुज है। और Q एक नियत बिन्दु है। [Luck '45 '54]

माना P त्रिभुज ABC की भुजा BC में कोई बिन्दु है। त्रिभुज APB में $\vec{AP}+\vec{PB}=\vec{AB}$ ...(1)

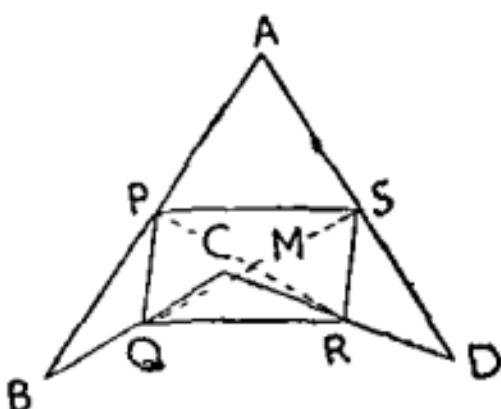
C बिन्दु से AB के सामानान्तर और AB के बराबर रेखा CQ खींचो।

तब $\vec{CQ}=\vec{AB}=\vec{AP}+\vec{PB}$ ....(2)

अब त्रिभुज PCQ में, $\vec{PQ}=\vec{PC}+\vec{CQ}=\vec{PC}+\vec{AP}+\vec{PB}$

अर्थात् $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$ और $\overrightarrow{PC}$ का परिणामित है।

अब चूंकि CQ, AB के बराबर व सामानान्तर है इसलिये ABQC सामानान्तर चतुर्भुज है।

3. किसी विषमतल (skew) चतुर्भुज मे सम्मुख भुजाओ के मध्य बिन्दुओ को मिलाने वाली रेखाएँ एक दूसरे को समद्विभाग करती हैं। और यह भी सिद्ध करो कि भुजाओ के मध्य बिन्दुओं को क्रमश: मिलाने वाली रेखाएँ समानान्तर चतुर्भुज बनाती हैं। [Raj. '65, '67]

ABCD एक चतुर्भुज है और P, Q, R, S भुजा AB, BC, CD और DA के मध्यबिन्दु हैं।

माना A, B, C, D के स्थिति–सदिश क्रमश: **a**, **b**, **c**, **d** हैं।

तो P, Q, R, S के स्थिति–सदिश क्रमश:

$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$, $\frac{\mathbf{d}+\mathbf{a}}{2}$ हैं।

यदि PR का मध्य बिन्दु M है, तो M का स्थिति–सदिश

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}\right)=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4} \quad ....(1)$$

इसी प्रकार QS के मध्य बिन्दु के स्थिति–सदिश

$$=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4} \quad ....(2)$$

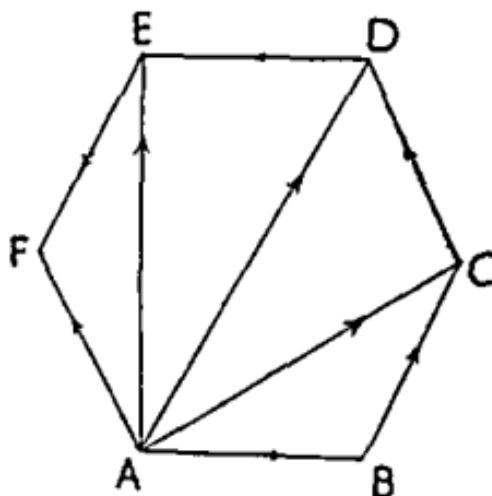
अत PR और QS एक दूसरे को समद्विभाग करती हैं।

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}=\frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}}{2} \quad ....(3)$$

$$\vec{SR}=\frac{c+d}{2}-\frac{d+a}{2}=\frac{c-a}{2} \quad \text{....(4)}$$

(3) और (4) से स्पष्ट है कि PQ, RS के समानान्तर है और बराबर है। अत: PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज है।

4. यदि किसी समान षड्भुज ABCDEF की दो क्रमिक (cosecutive) भुजाएँ सदिश **a**, **b** हो तो $\vec{CD}, \vec{DE}, \vec{EF}, \vec{FA}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AE}$ और $\vec{CE}$ को **a** व **b** में अभिव्यक्त करो। [Ra. '62, Utkal '53]

माना $\vec{AB}=\mathbf{a}$ और $\vec{BC}=\mathbf{b}$; $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ...(1)

$$\vec{AD}=2\,\vec{BC}=2\mathbf{b} \quad \text{....(2)}$$

$$\vec{CD}=\vec{AD}-\vec{AC}=2\mathbf{b}-(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{b}-\mathbf{a} \quad \text{....(3)}$$

$$\vec{FA}=-\,CD=\mathbf{a}-\mathbf{b} \quad \text{....(4)}$$

$$\vec{DE}=-\,\mathbf{a} \quad \text{....(5)}$$

$$\vec{EF}=-\,\vec{BC}=-\,\mathbf{b} \quad \text{....(6)}$$

$$\vec{AE}=-(\vec{EF}+\vec{FA})=\mathbf{b}+\mathbf{b}-\mathbf{a}=2\mathbf{b}-\mathbf{a} \quad \text{....(7)}$$

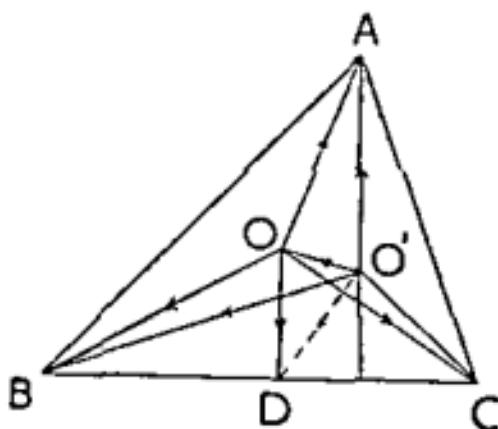
5. यदि O और O′ किसी त्रिभुज ABC के परिकेंद्र (circumcentre) और लम्ब केन्द्र (orthocentre) हो तो सिद्ध करो कि

(i) सदिश $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OO'}$

(ii) $\vec{O'A}+\vec{O'B}+\vec{O'C}=2\vec{O'O}$ (Raj. '62, '66)

(iii) $\vec{AO'}+\vec{O'B}+\vec{O'C}=\vec{AP}$

जबकि AP परिगत वृत्त का व्यास है। [Patna '51]

त्रिभुज ABC के O और O′ परिकेन्द्र तथा लम्ब-केन्द्र हैं। और D, BC का मध्य बिन्दु है।

त्रिकोण मिति मे हम जानते हैं कि

$$AO'=2OD \qquad ....(1)$$

$$\vec{OD}=\frac{\vec{OB}+\vec{OC}}{2}$$

या $\vec{OB}+\vec{OC}=2\,\vec{OD}=\vec{AO'}$ ....(2)

दोनों ओर $\vec{OA}$ जोड़ने पर

$$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{AO'}+\vec{OA} \qquad ....(3)$$

$\triangle AOO'$ से

$$\vec{OA}+\vec{AO'}=\vec{OO'} \qquad ....(4)$$

अतः $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OO'}$ ....(5)

(ii) चूंकि D, BC का मध्य बिन्दु है इसलिये

$$\overrightarrow{O'D}=\frac{\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'C}}{2}$$

या $\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'C}=2\ \overrightarrow{O'D}$ ....(6)

$\triangle OO'D$ से

$\overrightarrow{O'D}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{O'O}$ ....(7)

(6) और (7) से

$$\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'C}=2\ \overrightarrow{OD}+2\ \overrightarrow{O'O}$$
$$=\overrightarrow{AO'}+2\ \overrightarrow{O'O}$$

या $\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'C}+\overrightarrow{O'A}=2\ O'O$ ....(8)

(iii) $\overrightarrow{AO'}+\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'C}=2\ \overrightarrow{AO'}+(\overrightarrow{O'A}+\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'C})$

$=2\ \overrightarrow{AO'}+2\ \overrightarrow{O'O}$ (8) से

$=2\ (\overrightarrow{AO'}+\overrightarrow{O'O})$

$=2\ \overrightarrow{AO}$

किन्तु AO परिगत वृत्त की त्रिज्या है, इसलिये

2 AO=AP=व्यास के।

6. सिद्ध करो कि सदिश $3\mathbf{a}-7\mathbf{b}-4\mathbf{c}$, $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c}$ समतलीय (coplanar) है।

यदि तीनों सदिश-समतलीय हैं तो किसी एक को दूसरे दो की एकघात-संचय (linear combination) में अभिव्यक्त कर सकते हैं।

माना

$$3\mathbf{a}-7\mathbf{b}-4\mathbf{c}=x\ (3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c})+y\ (\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c})$$
$$=(3x+y)\ \mathbf{a}-(2x-y)\ \mathbf{b}+(x+2y)\ \mathbf{c}$$

जबकि x और y अदिश राशी हैं।

दोनो ओर से **a**, **b**, **c** के गुणाकों की तुलना करने पर

$3x+y=3$ ....(1)

$2x-y=7$ ....(2)

$x+2y=-4$ ...(3)

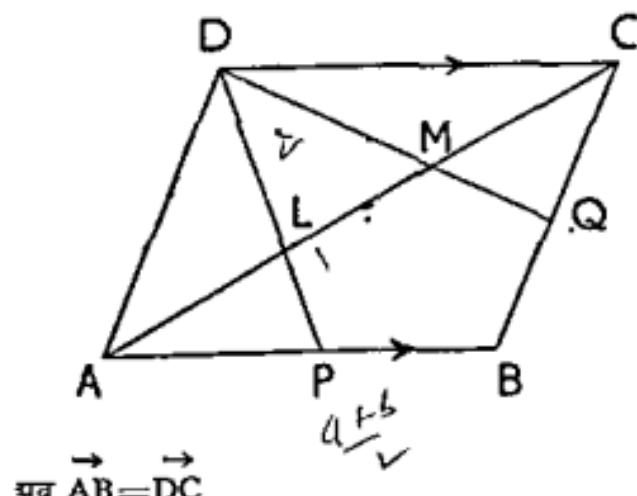
(1) और (2) से

$x=2, y=-3$

x और y का यह मान समीकरण (3) को भी सतुष्ट करता है। अत तीनो सदिश समतलीय हैं।

7. समानान्तर–चतुर्भुज ABCD की भुजाओ AB व BC के मध्य विन्दु क्रमशः P और Q हैं। सिद्ध करो कि AC और DP ऐसे विन्दु पर काटते हैं जो इनका समत्रिभाजन करता है। इसी प्रकार AC और DQ भी एक दूसरे को समत्रिभाजित करते हैं। [Agra '48]

ABCD समानान्तर चतुर्भुज है।

माना A, B, C, D के स्थिति–सदिश किसी मूल विन्दु O के सापेक्ष क्रमश. **a**, **b**, **c** और **d** हैं

अब $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

या $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{c}-\mathbf{d}$ ....(1)

P और Q के स्थिति–सदिश

$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$ व $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$ होंगे

DP पर, बिन्दु L ऐसा लो, जो इसका 2 : 1 के अनुपात में विभाजन करता है। तो L का स्थिति–सदिश

$$= \frac{1.d + 2\,\frac{(a+b)}{2}}{3} = \frac{a+b+d}{3} \qquad ....(2)$$

इसी प्रकार जो बिन्दु CA का 2 . 1 के अनुपात मे विभाजन करता है उसका स्थिति सदिश

$$= \frac{2.a + c.1}{3} = \frac{2a+c}{3} \qquad ....(3)$$

(1) और (3) से

$$\frac{2a+c}{3} = \frac{a+(b+d)}{3} = \frac{a+b+d}{3} \qquad ....(4)$$

(2) और (4) से स्पष्ट है कि L, CA व DP दोनों को 2 1 के अनुपात मे बाटता है। अतः DP और AC एक दूसरे का समत्रिभाजन करते हैं।

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि AC और DQ भी एक दूसरे को समत्रिभाजित करते हैं।

प्रश्नावली 1

1. बिन्दु A, B, C, D के स्थिति–सदिश क्रमशः a, b, $2a+3b$, और $a-2b$ है। तो सदिश $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ को a व b मे अभिव्यक्त करो।
2. $ABCD$ एक चतुर्भुज है। बल $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ और $\overrightarrow{DA}$ एक बिन्दु पर कार्य करते है। सिद्ध करो कि उनका परिणामित बल $2\overrightarrow{BA}$ है।
3. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज के तीन माध्यिकाओं द्वारा निरूपित किए ग सदिशों का सदिश–योग शून्य के बराबर है।

[लखनऊ 63, राजस्थान 63]

4. यदि किसी षड्भुज की दो क्रमिक भुजाएँ सदिश **a** व **b** हों तो क्रम से ली गई शेष चार भुजाओं द्वारा निरूपित किए गए सदिशों को ज्ञात करो। [राज० 62, उत्कल 53]

5. ABC एक त्रिभुज है और G उसकी मध्यिकाओं का प्रतिच्छेदन-बिन्दु है और O कोई बिन्दु है। तो सिद्ध करो कि

$$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=3\vec{OG}$$

6. सिद्ध करो कि तीन बिन्दु जिनके स्थिति-सदिश **a**, **b** और (3**a** − 2**b**) हैं वे एकरैखिक होंगे। [राज० 54, आगरा 55, 58, दिल्ली 50]

7. सिद्ध करो कि निम्न सदिश समतलीय हैं।
   (i) $\mathbf{a}-2\mathbf{b}+3\mathbf{c},\ -2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-4\mathbf{c},\ -\mathbf{b}+2\mathbf{c}$
   (ii) $\mathbf{a}+2\mathbf{b}+5\mathbf{c},\ 3\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c},\ 2\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}$
   (iii) $5\mathbf{a}+6\mathbf{b}+7\mathbf{c},\ 7\mathbf{a}-8\mathbf{b}+9\mathbf{c},\ 3\mathbf{a}+20\mathbf{b}+5\mathbf{c}$
   जबकि **a**, **b**, **c** कोई स्वेच्छ सदिश हैं।

8. सिद्ध करो कि किसी समानान्तर-चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। [आगरा 63]
   विलोमत: यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो वह समानान्तर-चतुर्भुज है।
   [लखनऊ 47, पटियाला 50]

9. ABCD एक समानान्तर-चतुर्भुज है। P इसके विकर्णों का प्रतिच्छेदन बिन्दु है। यदि O कोई स्वेच्छ बिन्दु हो तो सिद्ध करो कि

$$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=4\vec{OP}$$ [लखनऊ 59]

10. यदि A, B, C, D कोई चार बिन्दु हों तो सिद्ध करो कि सदिश-योग

$$\vec{AB}+\vec{CB}+\vec{CD}+\vec{AD}=4\vec{EF}$$

   जबकि E और F क्रमश AC और BD के मध्यबिन्दु हैं।

11. यदि **a**, **b**, **c**, **d** बिन्दु A, B, C, D के किसी मूलबिन्दु के सापेक्ष, स्थिति-सदिश हों और $\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{d}$, तो सिद्ध करो कि ABCD एक समानान्तर-चतुर्भुज है। [गोरखपुर 61]

12. सिद्ध करो कि यदि सदिश $(\pm \mathbf{a}, \pm \mathbf{b}, \pm \mathbf{c})$ किसी मूलबिन्दु से लिए जाएं तो उनके सिरे एक समान्तरषट्फलक (parallelepiped) के शीर्ष होंगे।

13. A, B, C तीन नियत (fixed) बिन्दु हैं और P एक ऐसा चर बिन्दु है कि P पर लगाए गए $\overrightarrow{PA}$ और $\overrightarrow{PB}$ बलों का परिणामित बल बिन्दु C से गुजरता है। तो P का बिन्दुपथ (locus) ज्ञात करो।

[संकेत $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PD}$; D, AB का मध्य बिन्दु है।]

14. सिद्ध करो कि आवश्यक (necessary) और पर्याप्त (sufficient) प्रतिबन्ध कि सदिश

$$r_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$
$$r_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$
$$r_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k},$$

एकघाततः स्वतन्त्र (linearly independent) हों, यह है कि, सारणिक (determinant)

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix}$$

शून्य से भिन्न है।

15. यदि सदिश **a** और **b** असमरेख हों तो सिद्ध करो कि बिन्दु $l_i\mathbf{a} + m_i\mathbf{b}$ $(i=1, 2, 3)$ समरेख होंगे यदि और केवल यदि (iff)

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & 1 \\ l_2 & m_2 & 1 \\ l_3 & m_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

अतः सिद्ध करो कि बिन्दु

$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$, $-7\mathbf{b} + 10\mathbf{c}$ एकरेखस्थ हैं।

[नागपुर 63]

16. यदि **a**, **b** बिन्दु A, B के स्थिति-सदिश हैं और AB व BA को बढ़ा कर उन पर क्रमशः C और D बिन्दु इस प्रकार लिए गए हैं कि

$AC=3AB$ और $BD=2BA$ तो C और D के स्थिति-सदिश ज्ञात करो।

17. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज में दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समानान्तर होती है और उसकी आधी होती है। [विक्रम 62, राज० 60, लखनऊ 63, आगरा 56]

18. सिद्ध करो कि किसी समलम्ब चतुर्भुज में दो असमानान्तर भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा समानान्तर भुजाओं के योग की आधी होती है, और उनके समानान्तर होती है।

19. सिद्ध करो कि किसी समलम्ब चतुर्भुज के विकर्णों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा समानान्तर रेखाओं के अन्तर की आधी होती है और उनके समानान्तर होती है।

20. सदिश विधि द्वारा सिद्ध करो कि किसी समानान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं समान होती हैं और विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। (लखनऊ 57, 63, आगरा 63)

1.17 सदिश का विघटन (Resolution of a Vector)

हम अनुच्छेद 1.16 में देख चुके हैं कि किसी भी सदिश को किन्हीं तीन स्वेच्छ असमतलीय-सदिशों $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ में अभिव्यक्त कर सकते हैं जैसे

$$r=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$$

यहां हम ऐसी स्थिति का विचार करेंगे जिसमें तीन असमतलीय-सदिश परस्पर अभिलम्ब हों।

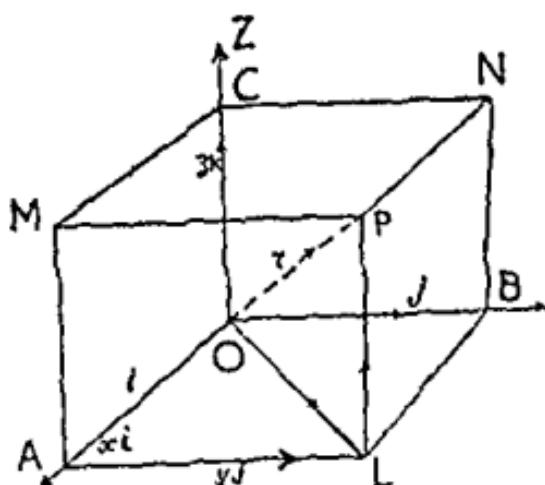
एक दक्षिणावर्तीय-निर्देशाक्ष-पद्धति OX, OY, OZ लो। इन अक्षों की दिशा में इकाई सदिश $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ क्रमशः OX, OY, OZ के समानान्तर हैं।

P कोई बिन्दु है और $\overrightarrow{OP}=r$, OP को विकर्ण मान कर समानान्तर-फलक (Parallelepiped) OALBCMPN खींचो।

माना $OA=x$, $OB=y$ और $OC=z$.

$$\overrightarrow{OA}=x\mathbf{i}.$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AL}=y\mathbf{j}$$

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{LP}=z\mathbf{k}.$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LP}.$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{LP}.$$
$$=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}. \qquad ....(1)$$

अतः दिया हुआ सदिश $\overrightarrow{OP}=r$ निम्न प्रकार से अभिव्यक्त किया जा सकता है :—

$$r=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \qquad ....(2)$$

जबकि x, y, z बिन्दु P के निर्देशांक है

त्रिविमितीय-(3-dimensional) सदिश $\overrightarrow{OP}$ को वास्तविक संख्याओं के क्रमबद्ध समुदाय (ordered aggregate) द्वारा भी अभिव्यक्त किया जा सकता है। सदिश r को हम (x, y, z) भी लिख सकते है।

घटक-सदिश $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$ सदिश r के $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ दिशाओं मे लम्बवत् प्रक्षेप है। और x, y, z, OP $(=r)$ के आयतीय-अवयव है। इनको अवशेष (Residue) या वियोजित (Resolute) के नाम भी दिए गए हैं; और इकाई सदिश $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ को लम्ब-प्रसामान्यक (ortho-normal) इकाई त्रयी (triads) के नाम से भी लिखा जाता है।

पुनः

$$OP^2=PL^2+OL^2=OA^2+AL^2+PL^2$$
$$=x^2+y^2+z^2$$

या $|OP^2| = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ....(3)

अर्थात् किसी सदिश के मापाक का वर्ग उसके आयतीय-अवयवो के वर्ग के योग के बराबर होता है।

यदि

$= x_t i + y_t j + z_t k \qquad (t = 1, 2 .... n)$

तो $\sum_1^n r_t = (\sum_1^n x_t)\, i + (\sum_1^n y_t)\, j + (\sum_1^n z_t) k$ ....(4)

अर्थात् $\sum_1^n r_t$ का i दिशा मे घटक $\sum_1^n x_t$ है।

परिणाम (4) का निम्न प्रकार से भी वर्णन किया जा सकता है।

किसी भी दिशा मे किन्ही सदिशो के योग का वियोजित भाग उसी *दिशा मे सदिशो के व्यक्तिगत वियोजित भागो के योग के समान होता है*

उपर्युक्त प्रमेय मे हम वियोजित भाग के स्थान पर किसी भी "समतल पर प्रक्षेप" का भी प्रयोग कर सकते हैं।

1.18 दिक्कोज्या (Direction Cosines)

माना $\overrightarrow{OP}$; OX, OY, OZ या i, j, k की दिशाओ के साथ क्रमश: कोण α, β, γ बनाता है। और $OP = r$

$$\left.\begin{aligned} x &= OP \cos\alpha = r \cos\alpha \\ y &= OP \cos\beta = r \cos\beta \\ z &= OP \cos\gamma = r \cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad ....(1)$$

किन्तु $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{r}$$

घन-ज्यामिति मे $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ को OP के अक्ष OX, OY, OZ के साथ दिक्कोज्या कहते हैं और इनको l, m, n से चिह्नित किया जाता है। एक अचर बिन्दु के लिए OP, अर्थात् r निश्चित होगा तो दिक्कोज्या

x, y, z के समानुपाती होंगे। इसलिए x, y, z, OP की दिशा–अनुपात (direction ratios) कहलाते है।

यह स्पष्ट है कि r की दिशा मे इकाई सदिश $\hat{r}$, निम्न विधि से होगा—

$$\hat{r}=r/r=\cos\alpha\,\mathbf{i}+\cos\beta\,\mathbf{j}+\cos\gamma\,\mathbf{k}$$

1.19 किन्ही दो बिन्दुओं, $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$ और $P_2\ (x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी ज्ञात करना और उनको मिलाने वाली रेखा P_1P_2 के दिक्कोज्या निकालना (To find the distance between two points and direction cosines of the line joining them)

माना P_1, P_2 के स्थिति–सदिश किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष r_1, r_2 है

$$\overrightarrow{OP_1}=r_1=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+{}_1\mathbf{k}. \qquad ....(1)$$

$$\overrightarrow{OP_2}=r_2=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k} \qquad ....(2)$$

$$\therefore \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=r_2-r_1$$

$$=(x_2-x_1)\,\mathbf{i}+(y_2-y_1)\,\mathbf{j}+(z_2-z_1)\,\mathbf{k} \qquad ....(3)$$

$$\text{अतः } |P_1P_2|=\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$....(4)$$

समीकरण (4) किन्ही दो बिन्दुओं के बीच की दूरी का उनके कार्तीय (Cartesion coordinates) निर्देशाको मे ज्ञात करने का सूत्र है।

यह स्पष्ट है कि P_1P_2 के दिशा–अनुपात $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ के गुणाक हैं। अर्थात् (x_2-x_1), (y_2-y_1), और (z_2-z_1) हैं।

अतः P_1P_2 के दिक्कोज्या (D.C)=

$$\frac{x_2-x_1}{\sqrt{\Sigma(x_2-x_1)^2}},\ \frac{y_2-y_1}{\sqrt{\Sigma(y_2-y_1)^2}},\ \frac{z_2-z_1}{\sqrt{\Sigma(z_2-z_1)^2}}$$

1.20 दो सदिशों के बीच का कोण ज्ञात करना (To find the angle between two vectors)

किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष, माना दो बिन्दु P_1, P_2 के स्थिति-सदिश r_1, r_2 हैं और उनके निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)

तो $\overrightarrow{OP_1}=r_1=x_1 + y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$

$\overrightarrow{OP_2}=r_2=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$

$P_1P_2=|r_2-r_1|=\sqrt{\Sigma(x_2-x_1)^2}$

माना r_1 और r_2 के बीच का कोण θ है। तो

$P_1P_2^2=OP_1^2+OP_2^2-2OP_1.OP_2\ \cos\theta$

या $\cos\theta=\dfrac{r_1^2+r_2^2-|P_1P_2|^2}{2r_1r_2}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{किन्तु } r_1^2=r_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2 \text{ और}\\ r_2^2=r_2^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2\end{array}\right\} \quad ...(2)$$

(1) और (2) से

$$\text{Cos }\theta=\frac{\Sigma x_1^2+\Sigma x_2^2-\Sigma(x_2-x_1)^2}{2\sqrt{\Sigma x_1^2}\ .\sqrt{\Sigma x_2^2}}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_1r_2} \quad ..(3)$$

यदि (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), $\overrightarrow{OP_1}$ और $\overrightarrow{OP_2}$ के दिक्कोज्या हो तो

$$l_1=\frac{x_1}{r_1},\quad m_1=\frac{y_1}{r_1},\quad n_1=\frac{z_1}{r_1} \text{ और}$$

$$l_2=\frac{x_2}{r_2},\quad m_2=\frac{y_2}{r_2},\quad n_2=\frac{z_2}{r_2}.$$

अतः $\text{Cos }\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 \quad ..(4)$

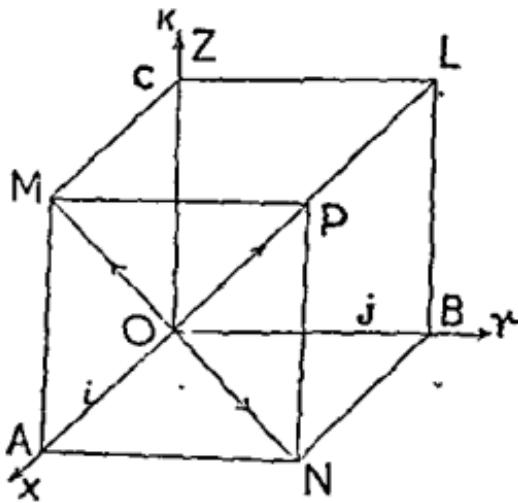
समीकरण (4) से हम $\sin\theta$ और $\tan\theta$ का मान भी प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 1:—

तीन सदिश, जिनके परिमाण a, $2a$, $3a$ हैं, एक ही बिंदु पर मिलते

हैं; और उनकी दिशाएं एक घन के तीन आसन्न तलो के विकर्णों की हों तो उनका परिणामित ज्ञात करो।

[लखनऊ 51, 58, ब. हि. वि. 54, दिल्ली 62]

हल:—

माना सदिश a, 2a और 3a घन OANBC LPM के विकर्ण OL, OM और ON की दिशाओं मे हैं। और OX, OY, OZ की दिशाओं मे इकाई सदिश **i**, **j**, **k** हैं। तो

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OL}&=\frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{j}+\frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{k}\\ \overrightarrow{OM}&=\frac{2a}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{2a}{\sqrt{2}}\mathbf{k}\\ \overrightarrow{ON}&=\frac{3a}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{3a}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\end{aligned}\right\}\quad ....(1)$$

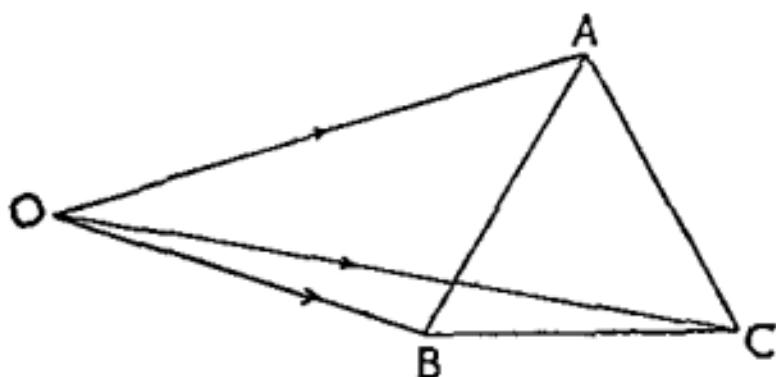
योग करने पर परिणामित $\mathbf{r}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$

$$=\frac{5a}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{4a}{\sqrt{2}}\mathbf{j}+\frac{3a}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

r का मापांक

$$=\sqrt{\frac{25a^2}{2}+\frac{16a^2}{2}+\frac{9a^2}{2}}=5a$$

2. यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष $a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$; $b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, $c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$ हो तो भुजाओं द्वारा निरूपित किए गए सदिशों को ज्ञात करो, और भुजाओं की लम्बाई भी ज्ञात करो। [लखनऊ 53, पंजाब 56, विक्रम 62, कर्नाटक 62]

माना किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष A, B, C के स्थिति-सदिश

$$\overrightarrow{OA}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OB}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OC}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$$ हैं।

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})-(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})$$

$$=(b_1-a_1)\mathbf{i}+(b_2-a_2)\mathbf{j}+(b_3-a_3)\mathbf{k} \quad ....(1)$$

इसी प्रकार

$$\overrightarrow{BC}=(c_1-b_1)\mathbf{i}+(c_2-b_2)\mathbf{j}+(c_3-b_3)\mathbf{k} \quad .(2)$$

और $$\overrightarrow{CA}=(a_1-c_1)\mathbf{i}+(a_2-c_2)\mathbf{j}+(a_3-c_3)\mathbf{k} \quad ...(3)$$

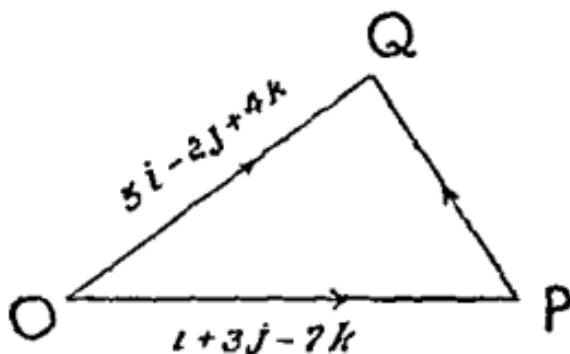
भुजा $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\Sigma(b_1-a_1)^2}$;

$BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\Sigma(c_1-b_1)^2}$;

$CA=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{\Sigma(a_1-c_1)^2}$.

3. यदि P और Q के स्थिति-सदिश क्रमश: $\mathbf{i}+3\mathbf{j}-7\mathbf{k}$ और

$5i-2j+4k$ हो तो सदिश $\overrightarrow{PQ}$ का मान तथा उसके दिक्कोण ज्ञात करो।

माना मूलबिन्दु O है।

$$\overrightarrow{OP}=i+3j-7k$$

$$\overrightarrow{OQ}=5i-2j+4k$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$

$$=(5i-2j+4k)-(i+3j-7k)$$

$$=4i-5j+11k \qquad (1)$$

$\overrightarrow{PQ}$ का मापाक $=\sqrt{4^2+5^2+11^2}=9\sqrt{2}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}$ के दिक्कोज्या

$$=\frac{4}{9\sqrt{2}},\ \frac{-5}{9\sqrt{2}},\ \frac{11}{9\sqrt{2}} \text{ होंगे।}$$

[चूंकि $\cos\alpha=\frac{x}{r}$ इत्यादि]

4. सदिश **a** और **b** के बीच के कोण का ज्या (sine) ज्ञात करो जबकि $a=3i+j+k$ और $b=2i-2j+4k$ [लखनऊ, 60]

हल: **a** का परिमाण $=\sqrt{3^2+1^2+1^2}=\sqrt{11}$ ....(1)

b का परिमाण $=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$ ...(2)

$$\mathbf{a} \text{ के दिक्कोज्या} = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{}}\right) \quad \ldots(3)$$

$$\mathbf{b} \text{ के दिक्कोज्या} = \left(\frac{2}{2\sqrt{6}}, \frac{-2}{2\sqrt{6}}, \frac{2}{2\sqrt{6}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \quad (4)$$

माना a और b के बीच का कोण θ है। तो

$$\cos\theta = \Sigma l_1 l_2$$

$$= \frac{3.1 - 1\,1 + 2\,1}{\sqrt{66}} = \frac{4}{\sqrt{66}} \quad \ldots(5)$$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{16}{66}} = \frac{5}{\sqrt{33}} \quad \ldots(6)$$

प्रश्नावली 2

1 किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A (2, −1, −3); B (4, 2, 3); C (6, 3, 4) है। सिद्ध करो कि $\overrightarrow{AB}=(2, 3, 6)$ और $\overrightarrow{AC}=(4, 4, 7)$ है और उनकी लम्बाई क्रमश. 7 व 9 हैं। उनके दिक्कोज्या ज्ञात करो।

2 A, B, C, D बिन्दुओं के स्थिति-सदिश क्रमशः $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$; $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $-5\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ और $\mathbf{i}+10\mathbf{j}+10\mathbf{k}$ हैं। तो सिद्ध करो कि AB रेखा CD के समानान्तर है।

3 सिद्ध करो कि बिन्दु
$\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $3\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ एक समबाहु त्रिभुज बनाते हैं।

4. सिद्ध करो कि तीन बिन्दु जिनके स्थिति–सदिश क्रमशः $3i-2j+4k$, $i+j+k$, $-i+4j-2k$ हैं एक रैखिक है।
[संकेत : AC को Bλ : 1 के अनुपात में बाटता है]

5. यदि P, Q, R, S के स्थिति–सदिश $2i+4k$, $5i+3\sqrt{3}j+4k$, $-2\sqrt{3}j+k$, $2i+k$ है तो सिद्ध करो कि RS, PQ के समानान्तर है और $\frac{2}{3}$ PQ के बराबर है। [गोरखपुर 62]

6. त्रिभुज ABC का परिमाप ज्ञात करो जिसके शीर्ष (3, 1, 5), (– 1, – 1, 9) और (0, – 5, 1) है।

7. यदि दो सदिश समानान्तर हों तो सिद्ध करो कि एक के घटक दूसरे के घटकों के समानुपाती होंगे। अन्यथा सिद्ध करो कि बिन्दु $(i-2j-8k)$, $(5i-2k)$ और $(11i+3j+7k)$ समरेख हैं। और यह भी ज्ञात करो कि B, AC को किस अनुपात में बाटता है।
(राज. 1961)

8. त्रिभुज ABC की भुजाओं की लम्बाई ज्ञात करो जिसके शीर्ष A (2, 4, – 1), B (4, 5, 1), C (3, 6 – 3) हैं। सिद्ध करो कि त्रिभुज समकोणिक है। AB के दिक्कोज्या (d.c) ज्ञात करो।
(राज. 66)

9. बिन्दु D, E, F त्रिभुज ABC की भुजाओ BC, CA, AB को क्रमशः 1 : 4, 3 : 2, और 3 : 7 के अनुपात में बांटते हैं तो सिद्ध करो कि सदिशों $\vec{AD}$, $\vec{BE}$, $\vec{CF}$ का योग सदिश $\vec{CK}$ के समानान्तर है। जबकि K, AB को 1 : 3 के अनुपात में बाटता है।

2

केन्द्रक तथा प्रारम्भिक भौतिक अनुप्रयोग

2.1 केन्द्रक (Centroid)

माना n विन्दु जिनके मूलविन्दु O के सापेक्ष स्थिति-सदिश **a**, **b**, **c**.... हैं तो विन्दु G जिसका स्थिति-सदिश

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\ (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}- -) \qquad ...(1)$$

है इनका केन्द्रक (Centroid) कहलाता है । इसे माध्य-केन्द्र (mean centre) भी कहते हैं । इस परिभाषा को निम्न रूप से व्यापक बनाया जा सकता है ।

यदि n विन्दु A, B, C ... जिनकी सहचरी-सख्या (associated-number) p, q, r. .. हैं (जिनका योग शून्य न हो) तो विन्दु G जिसका स्थिति-सदिश

$$\overrightarrow{OG} = \mathbf{r} = \frac{p\mathbf{a}+q\mathbf{b}+r\mathbf{c}+ .... ..}{p+q+r+ ....}, \qquad ....(2)$$

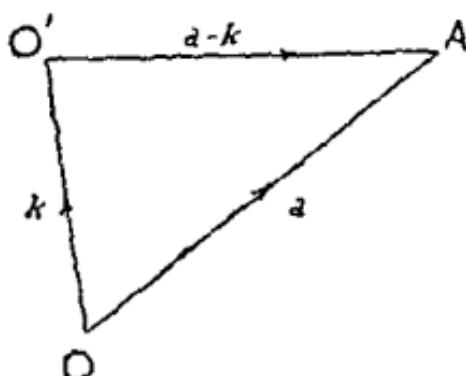
है, उन विन्दुओं का सहचारी सख्या p, q, r.... से सम्बन्धित केन्द्रक कहलाता है ।

विशेष स्थिति मे, दो विन्दु A, B का केन्द्रक जिनकी सहचारी-सख्या p, q हैं, AB को $q : p$ के अनुपात मे बाटता है । क्योंकि

$$OG' = \frac{p\mathbf{a}+q\mathbf{b}}{p+q} \qquad ....(3)$$

प्रमेय .I. केन्द्रक मूल-विन्दु की स्थिति पर निर्भर नही होता ।

माना बिन्दु A, B, C....के स्थिति–सदिश, मूलबिन्दु O के सापेक्ष **a**, **b**, **c**....हैं। और O′ एक ऐसा बिन्दु है जिसका O के सापेक्ष स्थिति–सदिश **k** है। अब O′ को नया मूल-बिन्दु माना तो बिन्दु A, B, C.... के मूलबिन्दु O′ के सापेक्ष स्थिति–सदिश क्रमश $\mathbf{a}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}-\mathbf{k}$,....है।

यदि अब A, B, C ...का केन्द्रक G′ है तो

$$O'G' = \frac{p(\mathbf{a}-\mathbf{k})+q(\mathbf{b}-\mathbf{k})+r(\mathbf{c}-\mathbf{k})+....}{p+q+r+...}$$

$$= \frac{p\mathbf{a}+q\mathbf{b}+r\mathbf{c}+\ ...}{p+q+r} - \mathbf{k}.$$

$$= \overrightarrow{OG} - \mathbf{k} = \overrightarrow{O'G}.$$

अतः बिन्दु G′, G पर संपाती है और केन्द्रक मूलबिन्दु की स्थिति से स्वतन्त्र है।

प्रमेय 2, यदि G_1 , एक बिन्दु–पद्धति A, B, C ...का केन्द्रक है जिनकी सहचर-सख्या p, q, r हैं और G_2 दूसरी पद्धति A′, B′, C′.... का केन्द्रक है और इनके सहचर–अंक p', q', r' हैं। तो सब बिन्दुओ का केन्द्रक G दो बिन्दुओ G_1, G_2 का केन्द्रक होगा और उनके सहचर–अंक $(p+q+r+\ ...)$ और $(p'+q'+r'+....)$ हैं।

माना मूल-बिन्दु O है। तो

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{p.\mathbf{a}+q.\mathbf{b}+r.\mathbf{c}+\ ...}{p+q+r+....} = \frac{\Sigma p\mathbf{a}.}{\Sigma p} \qquad ....(4)$$

$$\overrightarrow{OG_2}=\frac{p'\mathbf{a}'+q'\mathbf{b}'+r'.\mathbf{c}'+..}{p'+q'+r'+....}=\frac{\Sigma p'\mathbf{a}'}{\Sigma p}. \quad ....(5)$$

यदि G_1, G_2 के सहचर बिन्दु Σp, और $\Sigma p'$ हो तो उनका केन्द्रक G एक ऐसा बिन्दु होगा कि

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OG_1}\,\Sigma p+\overrightarrow{OG_2}\,\Sigma p'.}{\Sigma p+\Sigma p'}$$

$$=\frac{p\,\mathbf{a}+q\,\mathbf{b}+r\,\mathbf{c}+.... \quad +p'\mathbf{a}'+q'\mathbf{b}+r'\mathbf{c}'+....}{\Sigma p+\Sigma p'} \quad ....(6)$$

(6) से स्पष्ट है कि G सब बिन्दुओ की सयुक्त पद्धति का केन्द्रक है।

यह प्रमेय किन्ही उप-पद्धतियो के लिए भी सत्य है। प्रत्येक पद्धति के केन्द्रक को एक बिन्दु द्वारा व्यक्त करके *उसका सहचर अंक उस उप-पद्धति* के सहचर अंको का योग होगा, अर्थात् Σp.।

2.2 संहति-केन्द्र (mass-centre).

यदि कई कण जिनकी सहति m_1, m_2, m_3....है, और ऐसे बिन्दुओ पर स्थित हैं जिनके स्थिति-सदिश क्रमश $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, .. है तो उनका सहति-केन्द्र (mass-centre) उन बिन्दुओ का केन्द्र होगा व उनके सहचर-अक m_1, m_2, m_3....होगे। अतः किसी भी पद्धति मे सहति-केन्द्र ऐसा बिन्दु G है कि

$$\overrightarrow{OG}=\mathbf{r}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3+\ ...}{m_1+m_2+m_3+....} \quad ....(1)$$

समीकरण (1) मे यदि G के निर्देशाक दिए हुए हो तो हम इससे अदिश समीकरण का निगमन (deduction) कर सकते हैं।

माना बिन्दु (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ....पर सहति-कण m_1, m_2, m_3....स्थित हैं। और आयतीय निर्देशाक पद्धति (system of rectangular-coordinates) OX, OY, OZ में यदि मूल बिन्दु O है। और **i**, **j**, **k** क्रमश: OX, OY, OZ की दिशाओ में इकाई सदिश हैं। तो

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k},$$

माना केन्द्रक G के निर्देशांक ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ हैं) तो

$$\vec{OG} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}, \qquad \ldots\ldots(2)$$

केन्द्रक के सूत्र से

$$\vec{OG} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k} = \frac{\Sigma m_1(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})}{\Sigma m_1}.$$

$$= \frac{\Sigma(m_1x_1)\mathbf{i} + \Sigma(m_1y_1)\mathbf{j} + \Sigma(m_1z_1)\mathbf{k}}{\Sigma m_1} \qquad .(3)$$

(3) में दोनों ओर i,j,k के गुणांको की तुलना करने से

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\Sigma(m_1x_1)}{\Sigma m_1}, \\ \bar{y} &= \frac{(\Sigma m_1y_1)}{\Sigma m_1}, \\ \bar{z} &= \frac{(\Sigma m_1z)_1}{\Sigma m_1}. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(4)$$

2.3 स्थिति-सदिशों में एकघात-सम्बन्ध । (Linear relation between position vectors)

सिद्ध करो कि यदि किन्ही स्थिर-विन्दुओ के स्थिति-सदिशो मे एकघात-सम्बन्ध (linear relation), मूल-विन्दु की स्थिति से स्वतन्त्र हो तो उसके लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध यह होगा कि उनके गुणांकों का बीजीय योग शून्य होना चाहिए

या

सिद्ध करो कि सम्बन्ध

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 + \ldots = 0 \qquad \cdots(1)$$

[$m_1, m_2, m_3 \ldots$ अदिश है]

मूलबिन्दु की स्थिति से स्वतन्त्र होगा यदि और केवल यदि (if and only if)

$m_1+m_2+m_3+ \quad =0$ ... (2)

माना $A_1, A_2 ... A_n$, n बिन्दु हैं जिनके स्थिति-सदिश किसी मूल-बिन्दु O के सापेक्ष a_1, a_2, a_3 हैं और

$\Sigma m_1 a_1 \quad =0$

माना नया मूलबिन्दु O' है और इसका O के सापेक्ष स्थिति-सदिश k है। तो बिन्दुओं $A_1, A_2 .... A_n$ के O' के सापेक्ष स्थिति-सदिश क्रमश

$a_1-k, a_2-k, a_3-k,$ हैं। ... (3)

(1) प्रतिबन्ध आवश्यक है। (The condition is necessary.)

दिया हुआ है कि सदिशों के बीच का (1) के आकार का सम्बध मूल-बिन्दु की स्थिति से उदासीन है। तो हमे सिद्ध करना है कि $\Sigma m_1 = O$.

उपर्युक्त प्रतिबंध से

$m_1(a_1-k)+m_2(a_2-k)+m_3(a_3-k)+ .... =0$

या $(m_1a_1+m_2a_2 .. m_na_n)-(m_1+m_2+....m_n)\,k=0$ ... (4)

(1) और (4) से

$m_1+m_2+....+m_n \quad =O.$ ....(5)

अतः प्रतिबंध आवश्यक है।

(2) प्रतिबन्ध पर्याप्त है। (The Condition is sufficient)

दिया हुआ है कि

$\Sigma m_1 a_1 = O....(1), \ \Sigma m_1 = 0$ ....(6)

माना मूलबिन्दु को O से O' मे बदलने पर (1) मे

$m_1(a_1-k)+m_2(a_2-k).... \quad =0$

या (1) और (6) से

$(m_1a_1+m_2a_2....+m_na_n)-(m_1+m_2+ ... m_n)k$

$=O-O \quad =0.$ (k के सब मान के लिए)

अतः प्रतिबंध पर्याप्त है।

नोटः—अनुच्छेद 2.1 से केन्द्रक G से

$$\vec{OG} = \mathbf{r} = \frac{p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c} + \ldots}{p+q+r+\ldots}$$

या $p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c} + \ldots \quad - (p+q+r\ldots)\,\mathbf{r} \quad = 0.$

गुणाकों का योग

$$= p+q+r+ \quad . \quad -(p+q+r+\ldots) \quad = 0.$$

इस प्रकार केन्द्रक मूल-विन्दु की स्थिति से स्वतन्त्र है।

2.4 कुछ साधारण भौतिक अनुप्रयोग।

(Some simple Physical Applications.)

अब हम यान्त्रिकी (mechanics) मे सदिशो के कुछ प्रारम्भिक अनुप्रयोगो पर विचार करेंगे।

(1) विस्थापन और वेग (displacement and velocity)

विस्थापन का मान और दिशा दोनों होते हैं। इसलिए यह सदिश राशि है। किसी बिन्दु का A से B तक का विस्थापन सदिश $\vec{AB}$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है। यदि एक कण A से B तथा B से C तक विस्थापित होता है तो अन्तिम विस्थापन सदिश-योग $\vec{AC}$ द्वारा दिखाया जा सकता है।

अर्थात्

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

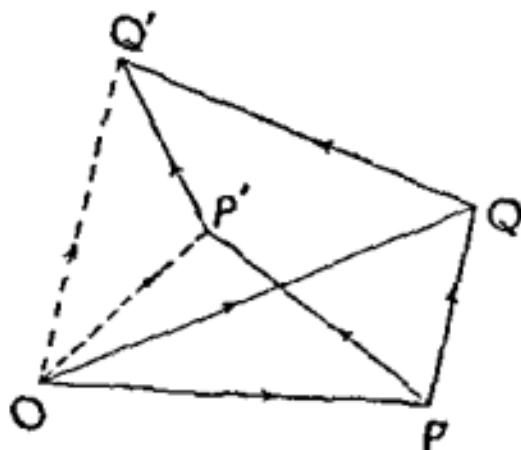
यदि दो बिन्दु P और Q दोनो ही गतिमान हो तो उनके बीच की परस्पर दूरी एक सदिश राशि है, जो सदिश $\vec{PQ}$ द्वारा निरूपित की जा सकती है। P के सापेक्ष Q की स्थिति निम्न प्रकार से होगी।

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}.$$

किसी कालान्तर मे Q का P के सापेक्ष विस्थापन उनकी परस्पर स्थिति में उस कालान्तर मे परिवर्तन के बराबर होगा। यदि किसी

समय के प्रारम्भ में दो बिन्दु P और Q पर स्थित हैं और एक कालान्तर के अन्त में वे P′ और Q′ पर हैं तो इस कालान्तर में परस्पर विस्थापन सदिशों $\overrightarrow{P'Q'}$ और $\overrightarrow{PQ}$ का सदिश-अन्तर $\overrightarrow{P'Q'} - \overrightarrow{PQ}$ होगा।

सापेक्ष-वेग (Relative velocity) :–P के सापेक्ष Q का सापेक्ष-वेग, Q की P से सापेक्षिक स्थिति की परिवर्तन की दर है।

माना P और Q क्रमश समवेग u और v से गतिमान हैं। और माना इकाई समय में P, P′ पर है और Q, Q′ पर। परिभाषा के अनुसार उनकी सापेक्ष-गति इकाई समय में उनकी परस्पर स्थिति के परिवर्तन की दर के बराबर है। अर्थात्

$$\text{सापेक्ष गति} = \overrightarrow{P'Q'} - \overrightarrow{PQ}$$
$$= (\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'}) - (OQ - OP)$$
$$= (OQ' - OQ) - (OP' - OP)$$
$$= QQ' - PP' = V - U \qquad \ldots(1)$$

अत. P के सम्बन्ध में Q की सापेक्ष-गति किसी मूलबिन्दु O से Q और P के गति-सदिशों के अन्तर के बराबर है।

(2) संगामी बल (Concurrent forces)

बल का परिमाण और दिशा होती है। इसलिए उसको भी एक सदिश द्वारा अभिव्यक्त किया जा सकता है। परन्तु बल की कार्य-दशा

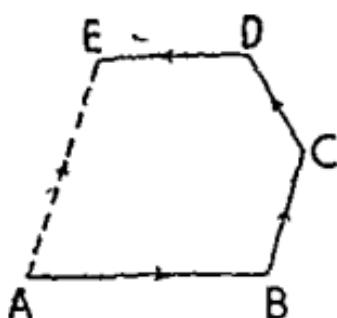
निश्चित होती है। यदि इसके कार्य करने की रेखा मे परिवर्तन किया जाए तो इसका प्रभाव भी बदल जाता है। परन्तु दो संगामी बलों का गतिज प्रभाव एक ही सदिश, उनका सदिश-योग, के प्रभाव के बराबर होता है, जो इनका परिणामित बल होता है और उसी बिन्दु पर कार्य करता है। यदि कुछ बल $F_1, F_2 \ldots F_n$ किसी वस्तु पर कार्य करें और उनकी कार्य-दिशाएँ एक ही बिन्दु P पर सगामी हो तो उन सब बलो के समान एक ही बल

$$R = F_1 + F_2 + \qquad F_n = \Sigma F$$

इन बलो की पद्धति का परिणामित-बल (Resultant) कहलाता है। परिणामित बल R, सदिश-बहुभुज द्वारा भी ज्ञात किया जाता है। अर्थात् ऐसा बहुभुज जिसकी भुजाओ की लम्बाई और दिशाएँ सदिश $F_1, F_2 \ldots F_n$ के समान हो और F_2, F_3, F_4 ..के प्रारम्भिक सिरे क्रमशः $F_1, F_2, F_3 \ldots$ के अन्तिम सिरे होते है। साधारणतया यह बहुभुज बन्द या एक ही समतल मे नही होता जबतक कि बल सतुलन-अवस्था मे या समतलीय न हों।

बहुभुज का यदि $\overrightarrow{AB}$ प्रथम सदिश है और $\overrightarrow{DE}$ अन्तिम सदिश है तो, परिणामित सदिश $\overrightarrow{AE}$ होगा

$$R = \overrightarrow{AE} = \Sigma F.$$

यदि सब बलो का सदिश-योग शून्य हो तो बहुभुज बन्द होगा। उस अवस्था मे बलों का परिणामित ही शून्य होगा और वस्तु साम्यावस्था मे रहेगी। यदि परिणामित बल शून्य हो तो किन्हीं तीन दिशाओ मे बलो के घटको का पृथक्-पृथक् योग शून्य होगा। इसके विलोमत: यदि किन्ही तीन दिशाओ मे बलों के घटको का योग शून्य है तो उनका परिणामित बल भी शून्य होगा। या बल सतुलन अवस्था मे होगे। अतः किसी बिन्दु पर कार्य करने वाले बल यदि संतुलन अवस्था में हो तो उसके लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि बलों के किन्ही तीन असमतलीय दिशाओ मे घटकों का पृथक्-पृथक् योग शून्य होना चाहिए।

(3) लामी प्रमेय (Lami's Theorem)

विशेष रूप से यदि उपर्युक्त दिष्ट-बहुभुज मे तीन बल सतुलन ग्रवस्था मे हो तो बहुभुज त्रिभुज हो जाएगा। सदिश F_1, F_2, F_3 तब समतलीय होंगे और प्रत्येक, दूसरे दो सदिशो के बीच के कोण के ज्या (sine) के समानुपाती होगा।

माना $A_1, A_2 \ldots A_n$, n विन्दु हैं जिनके स्थिति-सदिश किसी मूल-बिन्दु O के सापेक्ष $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ है। तो उनका परिणामित-सदिश R है,

$$R = \Sigma F = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots \overrightarrow{OA_n}.$$

$$= n\ \overrightarrow{OG}.$$

जबकि G, A_1, $A_2 \ldots A_n$ का केन्द्रक है। यदि बिन्दु G, O पर सपाती हो अर्थात् यदि मूल-विन्दु ही केन्द्रक हो तो बल संतुलन-ग्रवस्था मे होगे।

उदाहरण न० 1. एक व्यक्ति पूर्व की ओर 8 कि०मी० प्रति घन्टा की गति से जा रहा है। उसे प्रतीत होता है कि वायु सीधी उत्तर की ओर मे आ रही है। वह अपनी गति को दुगुना कर लेता है तो वायु की दिशा उत्तर-पूर्व से प्रतीत होती है। वायु की गति ज्ञात करो [राज० 63, लखनऊ 61]

माना i और j क्रमश पूर्व $(\overrightarrow{OE})$ और उत्तर $(\overrightarrow{ON})$ की दिशाओ मे एक कि० मी० प्रति घन्टा की गति निरूपित करते हैं।

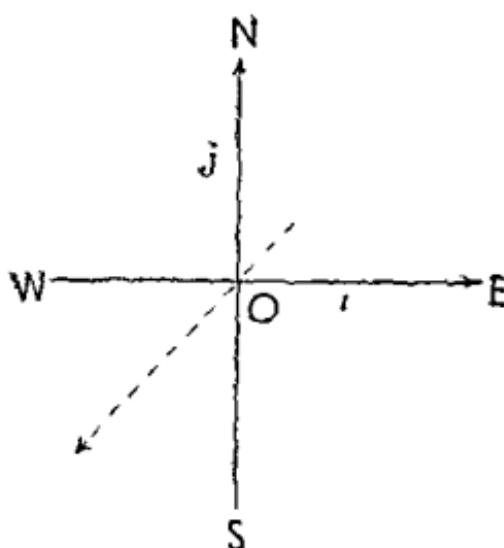
व्यक्ति की गति $= 8i + 0j$ ....(1)

माना वायु की गति $= xi + yj$ .. (2)

व्यक्ति के सम्बन्ध मे वायु की सापेक्ष-गति

$= (xi + yj) - (8i + 0j)$

$= (x - 8)\,i + yj$ ... (3)

परन्तु यह दिया हुआ है कि सापेक्ष-गति की दिशा उत्तर की ओर से है,

अर्थात्—j के समान्तर है। इसलिए

(3) में i का गुणाक शून्य होगा।

$\therefore 8 - x = 0$

या $x = 8$. ....(4)

अब व्यक्ति ने अपनी गति को दुगुना कर दिया, इसलिए अब गति

$= 16\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$. ....(5)

वायु की अब सापेक्ष-गति

$= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) - 16\mathbf{i}$

$= (x - 16)\ \mathbf{i} + y\mathbf{j}$. ....(6)

परन्तु यह उत्तर-पूर्व की ओर से है, तो i और j के गुणाक समान होंगे।

$\therefore x - 16 = y = -a$. ....(7)

(4) और (7) से

$y = -8$. ....(8)

$\therefore$ वायु की गति $= 8\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$. ....(9)

अर्थात्

उत्तर-पश्चिम की ओर से।

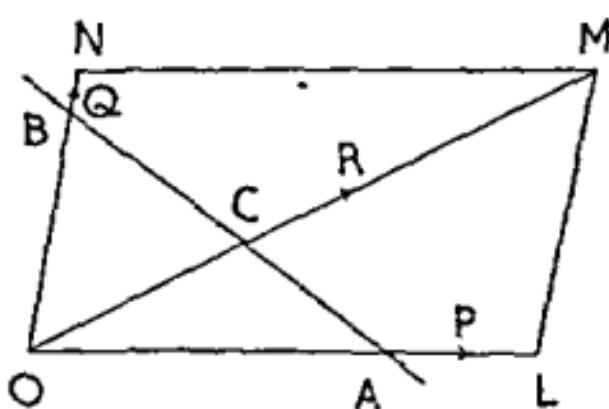
इसका परिमाण $=8\sqrt{2}$ कि० मी० : प्र. घ.

उदाहरण न० 2.

P और Q दो बल किसी बिन्दु O पर कार्य कर रहे हैं और उनका परिणामित बल R है। यदि एक तिर्यक रेखा उनकी कार्य-दिशाओं को क्रमशः बिन्दु A, B, C पर काटती है तो सिद्ध करो कि

$$\frac{P}{OA}+\frac{Q}{OB}=\frac{R}{OC}$$

[आगरा 49, 65, लखनऊ 49, कलकत्ता 63, राज० 66, 68].

माना बिन्दु O के सापेक्ष A, B, C के स्थिति-सदिश क्रमशः a, b, c हैं। तो

$\overrightarrow{OA}$ की दिशा में इकाई-बल

$=\frac{\;}{OA}$. (1)

$\therefore$ बल $\overrightarrow{P}=\frac{Pa}{OA}$. (2)

इसी प्रकार

बल $\overrightarrow{Q}=\frac{Q\,b}{OB}$, ...(3)

और बल $\overrightarrow{R}=\frac{R\,C}{OC}$. ... (4)

चूंकि $\vec{P}, \vec{Q}$ का परिणामित बल $\vec{R}$ है

$\therefore \quad \vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}.$

या $\dfrac{R.c}{OC} = \dfrac{Pa}{OA} + \dfrac{Qb}{OB}.$

या $\dfrac{Pa}{OA} + \dfrac{Qb}{OB} - \dfrac{Rc}{OC} = 0.$ ....(5)

परन्तु A, B, C समरेख हैं इसलिए a, b, c के गुणांकों का बीजीय-योग शून्य होगा।

अतः $\dfrac{P}{OA} + \dfrac{Q}{OB} - \dfrac{R}{OC} = 0.$

या $\dfrac{P}{OA} + \dfrac{Q}{OB} = \dfrac{R}{OC}.$

नोटः—यदि $\vec{P}, \vec{Q}$ का परिणामित बल R न हो परन्तु $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ तीनो बल संतुलन-अवस्था में हो तो

$$\frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} + \frac{R}{OC} = 0.$$

(क्योंकि $\vec{P} + \vec{Q} = -\vec{R}$.)

उदाहरण नं० 3.

किसी समानांतरफलक (parallelepiped) के चारों विकर्णों तथा सम्मुख किनारों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएं एक ही बिन्दु मे से निकलती हैं जो प्रत्येक का समद्विभाजन करता है।

माना OADBCLMN एक समानान्तरफलक है और I विकर्ण OM का मध्य-बिन्दु है।

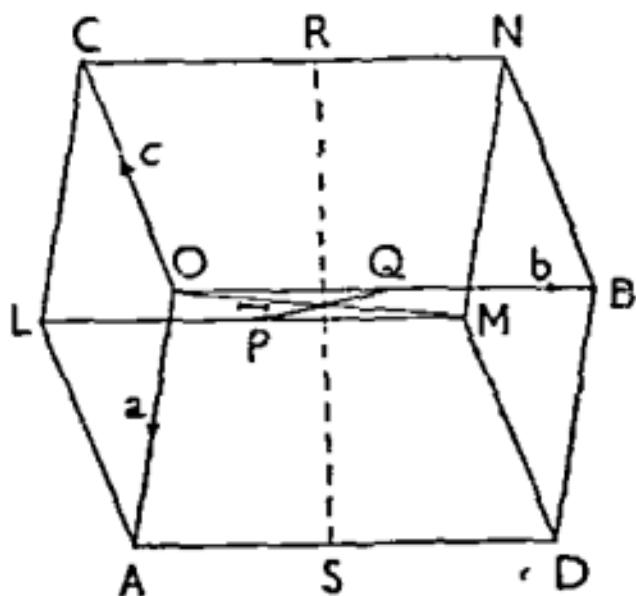
माना $\vec{OA} = \mathbf{a}$,

$\vec{OB} = \mathbf{b}$,

$\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}.$

अब $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM},$

$= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$ ....(1)

$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ ....(2)

माना विकर्ण $\overrightarrow{BL}$ का मध्य-बिन्दु I′ है तो

$OI' = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{b}}{2}$ ....(3)

(2) और (3) से स्पष्ट है कि I′, I पर सपाती है।

इसी प्रकार P, Q, LM और OB के मध्य-बिन्दु हैं तो P और Q के स्थिति-सदिश क्रमशः

$\frac{2\mathbf{a} + 2\mathbf{c} + \mathbf{b}}{2}$ व $\frac{\mathbf{b}}{2}$ हैं

$\therefore$ PQ का मध्य-बिन्दु $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$ है जोकि I पर संपाती है।

अतः विकर्ण तथा सम्मुख किनारों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ एक ही बिन्दु I पर संगामी होती हैं।

उदाहरण नं० 4.

एक कण पर कई बल-केन्द्र कार्य कर रहे है जिनमे से कुछ तो उसे आकर्षित करते है और कुछ प्रतिकर्षित करते हैं। परन्तु प्रत्येक बल उसके केन्द्र की कण से दूरी के अनुलोमत. विचरण करता है और भिन्न-भिन्न बल केन्द्रों पर बल का परिमाण भी भिन्न है। सिद्ध करो कि उनका परिणामित बल एक नियत विन्दु मे से गुजरता है चाहे कण कही भी हो।

[आगरा 40, विक० 62]

माना कण O बिन्दु पर है, और P_1, P_2...P_n बल-केन्द्र हैं। मूलबिन्दु O के सापेक्ष माना P_1, P_2....P_n के स्थिति-सदिश क्रमश a, b, c ... है।

माना बल $\mu_1 a$, $\mu_2 b$, $\mu_3 c$ ...हैं।

जबकि μ_1, μ_2, μ_3 ...धन या ऋण स्थिराक हैं उनके प्रतिकर्षण या आकर्षण के गुण के अनुसार.

परिणामित बल R है,

$$R = \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c + \dots \qquad \dots(1)$$

यदि a, b, c + ...के सहचर अंक μ_1, μ_2, μ_3....हो तो उनका केन्द्रक G ऐसा बिन्दु होगा कि

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c + \dots}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots} \qquad \dots(2)$$

(1) और (2) से

$$R = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots)\, \overrightarrow{OG} = K\overrightarrow{OG},$$

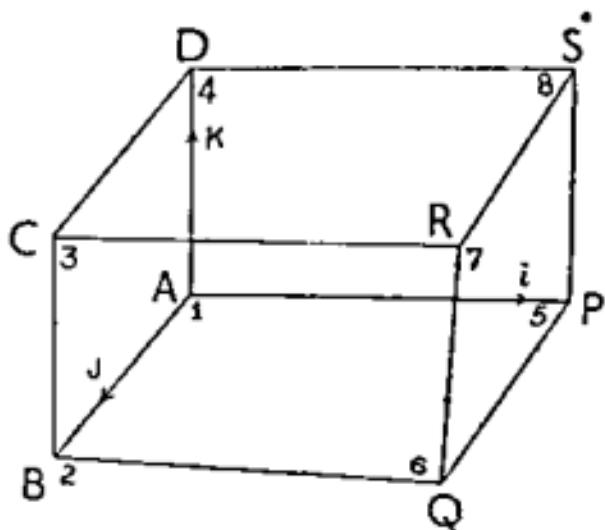
($K = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$....स्थिराक है।)

चूँकि केन्द्रक G मूलबिन्दु O की स्थिति से विमुक्त होता है इसलिए G एक नियत बिन्दु है। अत: परिणामित-बल R अचर बिन्दु G मे से गुजरता है।

उदाहरण नं० 5.

आठ कण जिनकी संहति 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ग्राम है क्रमश: इकाई घन के कोनो पर इस प्रकार रखे गए है कि पहले चार एक समतल

ABCD के कोनो पर और दूसरे चार इन कोनो के सम्मुख समतल पर प्रक्षेप P, Q, R, S पर । तो इनके सहति-केन्द्र के निर्देशाक ज्ञात करो ।

ABCD PQRS एक समानातरफलक है ।

माना विन्दु A के सापेक्ष, P, B, D के स्थिति-सदिश क्रमश. **i**, **j**, **k** है ।

Q, C, R, S के स्थिति-सदिश क्रमश:

$\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ और $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ होंगे ।

सहनि-केन्द्र G का स्थिति-सदिश

$$\vec{AG} = \frac{1.O+2\mathbf{j}+3\ (\mathbf{j}+\mathbf{k})+4.\mathbf{k}+5.\mathbf{i}+6.(\mathbf{i}+\mathbf{j})+7(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})+8(\mathbf{i}+\mathbf{k})}{1+2+3+4+5+6+7+8}$$

$$= \frac{26\mathbf{i}+18\mathbf{j}+22\mathbf{k}}{36} = \frac{13\mathbf{i}+9\mathbf{j}+11\mathbf{k}}{18}.$$

$$|\vec{AG}| = \sqrt{\frac{13^2+9^2+11^2}{18}} = \frac{\sqrt{371}}{18}.$$

सहनि-केन्द्र G के निर्देशाक

$$= \left(\frac{13}{18}, \frac{1}{2}, \frac{11}{18}\right).$$

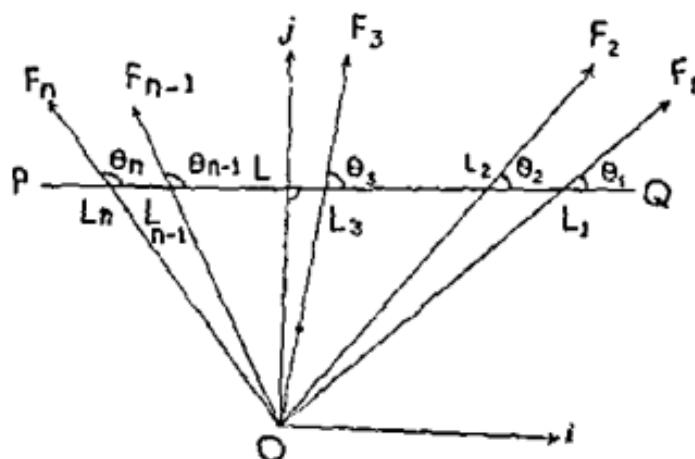
उदाहरण नं० 6.

यदि बिन्दु O पर कार्य कर रहे समतलीय बल $F_1, F_2 \cdots F_n$ सतुलन अवस्था मे हों और एक तिर्यक रेखा उनकी कार्य-दिशाओं को बिन्दु

$L_1, L_2 \ldots L_n$ पर काटती है तो सिद्ध करो कि

$$\Sigma \frac{F}{OL} = 0$$

[रेखा OL धन होगी यदि वह $\overrightarrow{OF}$ की दिशा में है।]

[आगरा 48, लखनऊ 56]

माना $F_1, F_2 \ldots F_n$ तिर्यक रेखा PQ के साथ $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_n$ का कोण बनाते हैं और OL, O से PQ पर लम्ब है।

माना PQ के लम्बवत तथा PQ की दिशा में इकाई सदिश **j** और **i** है। तो

$$\text{बल } \overrightarrow{F_1} = F_1 \cos\theta_1 \, \mathbf{i} + F_1 \sin\theta_1 \, \mathbf{j},$$

$$,, \ \overrightarrow{F_2} = F_2 \cos\theta_2 \, \mathbf{i} + F_2 \sin\theta_2 \, \mathbf{j},$$

$$,, \ \overrightarrow{F_3} = F_3 \cos\theta_3 \, \mathbf{i} + F_3 \sin\theta_3 \, \mathbf{j},$$

....

... .

$$\text{,,} \ \vec{F}_n = F_n \cos\theta_n \, \mathbf{i} + F_n \sin\theta_n \, \mathbf{j}.$$

इनका परिणामित बल

$$R = \sum_{r=1}^{n} (F_r \cos\theta_r \, \mathbf{i} + F_r \sin\theta_r \, \mathbf{j})$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (F_r \cos\theta_r)\mathbf{i} + \left(\sum_{r=1}^{n} F_r \sin\theta_r\right)\mathbf{j}.$$

परन्तु बल सतुलन अवस्था मे है। इसलिए **i** और **j** के गुणाक शून्य होंगे। अत

$$F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2 + \ldots. F_n \sin\theta_n = 0. \quad ..(1)$$

यदि O से PQ पर लम्ब OL=p तो

$$\sin\theta_1 = \frac{p}{OL_1}, \sin\theta_2 = \frac{p}{OL_2}, \ . \ \sin\theta_n = \frac{p}{OL_n} \ldots(2)$$

(1) और (2) से

$$\frac{F_1.p}{OL_1} + \frac{F_2.P}{OL_2} + \ldots \frac{F_n P.}{OL_n} = 0.$$

$$\text{या } \frac{F_1}{OL_1} + \frac{F_2}{OL_2} + \quad \frac{F_n}{OL_n} = 0 \quad (3)$$

चूँकि $p \neq o$, अन्यथा $OL_1, OL_2, \ OL_n$ सब शून्य होंगे।

उदाहरण न० 7.

यदि **a** और **b** असरेख-सदिश हो तो सिद्ध करो कि बिन्दु

$l_i\mathbf{a} + m_i\mathbf{b} \qquad (i = 1, 2, 3)$

समरेख होंगे यदि और केवल यदि

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & 1 \\ l_2 & m_2 & 1 \\ l_3 & m_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

अतः सिद्ध करो कि बिन्दु $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$, $-7\mathbf{b} + 10\mathbf{c}$. समरेख हैं। [नागपुर 63]

माना तीन बिन्दुओं A, B, C के स्थिति-सदिश क्रमश:

$l_1\mathbf{a}+m_1\mathbf{b},\ l_2\mathbf{a}+m_2\mathbf{b},\ l_3\mathbf{a}+m_3\mathbf{b}$ हैं।

यदि यह समरेख होंगे तो

माना $AB : BC \quad =\lambda : 1$

तो $l_2\mathbf{a}+m_2\mathbf{b} = \dfrac{(l_1\mathbf{a}+m_1\mathbf{b})+\lambda(l_3\mathbf{a}+m_3\mathbf{b})}{\lambda+1}$

या $(\lambda l_2+l_2-l_1-\lambda l_3)\,\mathbf{a}+(\lambda m_2+m_2-m_1-\lambda m_3)\,\mathbf{b}=0.$ ....(1)

a और b के गुणाकों को शून्य करने पर

$$\frac{l_1-l_2}{l_2-l_3}=\lambda, \text{ और} \qquad \dots(2)$$

$$\frac{m_1-m_2}{m_2-m_3}=\lambda. \qquad \dots(3)$$

(2) और (3) से

$$\frac{l_1-l_2}{l_2-l_3}=\frac{m_1-m_2}{m_2-m_3}$$

या $(l_1-l_2)\ (m_2-m_3)-(m_1-m_2)\ (m_2-m_3)=0.$ ....(4)

या $\begin{vmatrix} 1 & O & O \\ l_1 & l_1-l_2 & l_2-l_3 \\ m_1 & m_1-m_2 & m_2-m_3 \end{vmatrix}=0.$

या $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}=0.$

माना बिन्दु $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-4\mathbf{c}$, बिन्दुओं $(\mathbf{a}-2\mathbf{b}+3\mathbf{c})$, $(-7\mathbf{b}+10\mathbf{c})$ को मिलाने वाली रेखा को $\lambda : 1$ को अनुपात में बाँटता है। तो

$$2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-4\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}-2\mathbf{b}+3\mathbf{c}-\lambda\ (7\mathbf{b}-10\mathbf{c})}{\lambda+1}$$

या $(2\lambda+2-1)\mathbf{a}+(3\lambda+3+2+7\lambda)\mathbf{b}+(-4\lambda-4-3-10\lambda)=0$

a, b और c के गुणाकों को शून्य करने से

$\lambda=-\frac{1}{2},\ \lambda=-\frac{1}{2},\ \lambda=-\frac{1}{2}.$

अतः बिन्दु समरेख है।

——

प्रश्नावली नं० 3

1. किसी घन के एक कोने पर स्थित एक कण पर तीन बल 1, 2, 3 पौ० भार, क्रमशः उस कोने पर मिलने वाले तीन समतलों के विकर्णों की दिशाओं में कार्य कर रहे हैं। तो उनका परिणामित बल ज्ञात करो।

2. एक क्षैतिज और दूसरा ऊर्ध्वाधर से 60° का कोण बनाता हुआ बल ज्ञात करो जिनका परिणामित बल P पौ० भा० ऊर्ध्वाधर की दिशा में है।

3. यदि दो बलों के परिणामित बल का परिमाण एक घटक के परिमाण के बराबर हो और उसकी दिशा इस घटक के लम्बवत हो तो दूसरा घटक ज्ञात करो।

4. किसी घन के एक कोने पर मिलने वाले तीन समतलों के विकर्णों द्वारा निरूपित किए गए सदिशों का योग ज्ञात करो।
[इलाहबाद 56, उस्मानिया 56, 59]

5. ज्ञात करो कि निम्न सदिश एकघाततः आश्रित हैं या स्वतन्त्र हैं।
$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$,
$\mathbf{r}_3 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

6. एक नाव की पानी के सापेक्ष गति $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ है। और पानी की पृथ्वी के सापेक्ष गति $\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ है। तो नाव की पृथ्वी के सापेक्ष गति ज्ञात करो जबकि **i** और **j** क्रमशः एक कि० मी० प्रति घन्टा की गति पूर्व और उत्तर की ओर निरूपित करते हैं।

7. 3_n बिन्दुओं, $\mathbf{i}, 2\mathbf{i}, 3\mathbf{i} \dots n\mathbf{i}$; $\mathbf{j}, 2\mathbf{j}, 3\mathbf{j} \dots n\mathbf{j}$; $\mathbf{k}, 2\mathbf{k}, 3\mathbf{k}, \dots n\mathbf{k}$, का केन्द्रक ज्ञात करो।
[उस्मानिया 56]

8. यदि n बिन्दुओं के स्थिति-सदिश n सगामी बल निरूपित करते हों तो सिद्ध करो कि यदि उनका केन्द्रक मूलबिन्दु पर सपाती है तो बल संतुलन अवस्था में होंगे।

9. यदि दो बल $n\overrightarrow{OA}$ और $m\overrightarrow{OB}$ हों तो उनका परिणामिन–बल $(m+n)\overrightarrow{OR}$ होगा जबकि R, AB को m : n के अनुपात मे बाँटता है।

10. D, E, F त्रिभुज ABC की भुजाओं के मध्य-विन्दु है। और O त्रिभुज के समतल मे कोई विन्दु है। तो सिद्ध करो कि बल $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ की पद्धति बल $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ की पद्धति के समान होगी यदि दोनो पद्धतिया एक ही विन्दु पर कार्य करें। और यह भी सिद्ध करो कि प्रत्येक पद्धति $3\overrightarrow{OG}$ के बराबर है, G त्रिभुज ABC का केन्द्रक है।

11. एक बिन्दु i – j समतल मे समान गति से वृत्त बनाता है। वह 12 सैकण्ड मे एक चक्र पूरा कर लेता है। यदि आरम्भ मे केन्द्र के सापेक्ष उसका स्थिति-सदिश i है, और वह i से j की ओर जाता है। तो 1, 3, 5, 7, $1\frac{1}{2}$, और $4\frac{1}{2}$ सै० के पश्चात् उसका स्थिति-सदिश ज्ञात करो। (राजस्थान 66)

12. किसी त्रिभुज के मध्य-विन्दुओं पर तीन बल भुजाओं के लम्बवत तथा उनके समानुपाती कार्य कर रहे है। तो सिद्ध करो कि वे संतुलन मे होंगे।

(सकेत लामी-प्रमेय का प्रयोग करो।)

13. एक कार 30 कि. प्र. घ. की गति से जा रही है। उसमे से एक व्यक्ति 10 कि. प्र. घ. की गति से, कार की गति के साथ 150° का कोण बनाती हुई दिशा मे छलाग लगाता है। तो उसकी पृथ्वी के सापेक्ष गति ज्ञात करो।

14. दो कण A और B एकसमान (uniform) गति से चल रहे हैं। एक समय उनके बीच की दूरी 15 फुट है। A तो B की ओर 5 फुट प्र. सै. की गति से और B रेखा AB के लम्बवत: $3\frac{3}{4}$ फुट प्र. सै. की गति से चल रहा है। तो उनकी सापेक्ष-गति ज्ञात करो।

15 एक चतुर्भुज ABCD के कोने A पर दो बल $\vec{AB}$ और $\vec{AD}$ कार्य कर रहे हैं। और दो बल $\vec{CB}$ और $\vec{CD}$ कोने C पर। तो सिद्ध करो कि उनका परिणामित-बल $4\vec{PQ}$ है, जबकि P और Q क्रमश. AC और BD के मध्य-बिन्दु हैं।

16 किसी समय-षड्भुज के शीर्ष A पर पांच बल दूसरे शीर्षों की दिशाओं मे कार्य कर रहे हैं। यदि बलो का परिमाण शीर्षों की A से दूरी के समानुपाती हो तो उनका परिणामित बल ज्ञात करो।

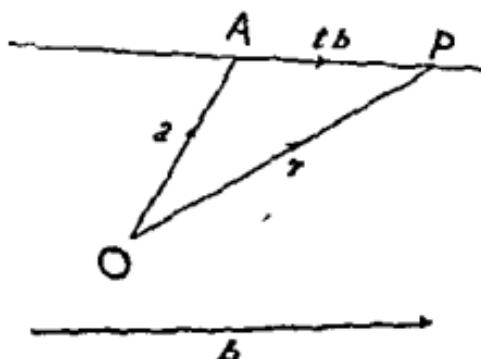
3

सरल रेखा और समतल के सदिश-समीकरण

3.1 परिचय

आगे के कुछ पृष्ठों मे हम देखेंगे कि यह सम्भव है कि सरल रेखाओं या समतलों पर स्थित विन्दुओं के स्थिति-सदिश को, दिए हुए सदिशों तथा चर अदिशों (चर प्राचल variable parameter) मे अभिव्यक्त कर सकते हैं। प्राचल के किसी भी विशेष मान के लिए हम सदिश-समीकरण द्वारा अभिव्यक्त किए गए विन्दु-पथ पर एक निश्चित विन्दु प्राप्त करते है। विलोमतः विन्दु-पथ पर किसी भी विन्दु के स्थिति-सदिश के अनुरूप प्राचल का एक निश्चित मान होता है। ऐसे समीकरण को (parametric equations) प्राचल-सदिष्ट समीकरण या केवल प्राचल-समीकरण कहते है।

3.2 सरल रेखा का समीकरण : (equation of a st. line)

3.2 (1) सरल-रेखा जो दिए हुए विन्दु में से गुजरती है तथा एक दिए हुए सदिश के समानान्तर है।

माना दिया हुआ विन्दु A है और उसका मूलविन्दु O के सापेक्ष स्थिति-सदिश **a** है। और सरल-रेखा सदिश **b** के समानान्तर है। माना

सरल-रेखा पर कोई बिन्दु P है जिसका स्थिति-सदिश r है। तब

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP} \qquad \dots(1)$$

किन्तु $\overrightarrow{AP}$ सदिश b के समानान्तर है इसलिए

$$\overrightarrow{AP}=t\,\mathbf{b} \qquad \dots(2)$$

(जबकि t कोई वास्तविक अंक है। और $\overrightarrow{AP}$ व b की दिशा एक ही है तो t धन और यदि दोनो की दिशाएं भिन्न है तो t ऋण होगा)

(1) और (2) से

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\,\mathbf{b}. \qquad \dots(3)$$

चूँकि P सरल-रेखा पर कोई स्वेच्छ बिन्दु है इसलिए t को भिन्न 2 मान देने से रेखा पर P की भिन्न-भिन्न स्थिति प्राप्त करते हैं।

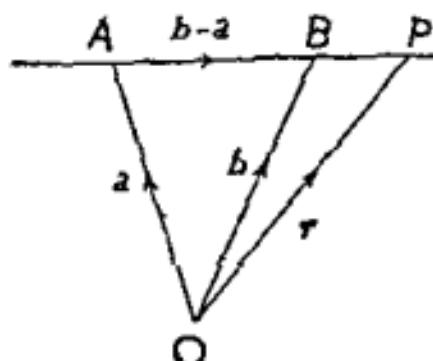
अत समीकरण (3) सरल-रेखा का समीकरण है जिसका प्राचल (parameter) t है।

उप-प्रमेय · मूलबिन्दु मे से हो कर जाने वाली और सदिश b के समानातर रेखा की प्राचल-समीकरण

$$\mathbf{r}=t\,\mathbf{b}. \qquad \dots(4)$$

(∵ a शून्य है।)

3 2 (2) दो दिए हुए बिन्दुओं मे से गुजरने वाली रेखा

माना दिए हुए बिन्दु A और B है जिनके स्थिति-सदिश, मूलबिन्दु O के सापेक्ष a और b हैं। AB पर कोई बिन्दु P लो।

माना P का स्थिति-सदिश r है।

$$\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}. \qquad \dots(1)$$

$$\therefore \vec{AP} = t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

(जबकि t कोई गुणज (multiple) है)

$$\therefore\ \vec{OP} = \vec{AP} + \vec{OA}$$

$$= \mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\ \mathbf{a} + \mathbf{b} \qquad \dots(2)$$

3 3 सदिश-समीकरण से कार्तीय (Cartesian) समीकरण ज्ञात करना—

अनुच्छेद 3.21 (1) में यदि (a_1, a_2, a_3) व (x, y, z) क्रमशः A और P के निर्देशांक हैं और i, j, k क्रमश अक्ष OX, OY, OZ की दिशाओं में इकाई-सदिश हैं। तो

$$\mathbf{a} = a_1\ \mathbf{i} + a_2\ \mathbf{j} + a_3\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

और यदि सदिश $\mathbf{b} = b_1\ \mathbf{i} + b_2\ \mathbf{j} + b_3\ \mathbf{k}$.

तो 3.21 मे समीकरण (1) और (3) से

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) + t(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \ \dots (1)$$

दोनो पक्षों में i, j, k के गुणाकों की तुलना करने से प्राप्त है

$$x = a_1 + b_1 t,$$

$$y = a_2 + b_2 t,$$

$$z = a_3 + b_3 t,$$

या

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3} = t \qquad \dots (2)$$

समीकरण (1) निर्देशांक-ज्यामिति मे बिन्दु (a_1, a_2, a_3) मे से निकलने वाली रेखा का समीकरण है और इसके दिककोज्या (d.c) b_1, b_2, b_3 के समानुपाती है।

(2) पुन. यदि समीकरण 3.22 (2) मे **a**, **b**, **r** के अनुरूप निर्देशाक लिखें तो

$$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=(1-t)(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})+t(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) \quad ....(3)$$

दोनो ओर से **i**, **j**, **k** के गुणाको की तुलना करने से प्राप्त है

$$x=(1-t)a_1+b_1 t,$$

$$y=(1-t)\, a_2+b_2t,$$

$$z=(1-t)\, a_3+b_3t,$$

या $\dfrac{x-a_1}{b_1-a_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2-a_2}=\dfrac{z-a_3}{b_3-a_3}=t.$

जोकि बिन्दु A (a_1, a_2, a_3) और B (b_1, b_2, b_3) मे से हो कर जाने वाली रेखा का कार्तीय समीकरण है।

3.4 तीन सदिश एक ही रेखा पर समाप्त हो (Condition that three vectors should terminate in the same st. line)

यदि तीन बिन्दु जिनके स्थिति-सदिश **a**, **b**, **c** है एकरेखस्थ हो तो उसके लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि हम सदा तीन अक l, m, n (सब शून्य नहीं) ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि

$$l\mathbf{a}+m\mathbf{b}+n\mathbf{c}=0,$$

और $l+m+n=0$

प्रतिबन्ध आवश्यक है :—

माना तीन A, B, C बिन्दुओ के किसी मूलबिन्दु के सापेक्ष, स्थिति-सदिश **a**, **b**, **c** हैं।

A और B मे से हो कर जाने वाली रेखा का सदिश-समीकरण 3 22 (2) से

$\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\,(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ .. (1) है।

यदि बिन्दु C, इस रेखा पर स्थित है। तो

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+t\,(\mathbf{b}-\mathbf{a}),$$

$$\text{या} \quad \mathbf{c}+(t-1)\,\mathbf{a}-t\,\mathbf{b}=0. \quad ....(2)$$

माना $l = t-1, \quad m = -t, \quad n = 1$, तो
गुणांकों का योग

$= l+m+n = 0$

अत: प्रतिबन्ध आवश्यक है।

प्रतिबन्ध पर्याप्त है:—माना तीन सदिश **a**, **b**, **c** निम्न समीकरण को संतुष्ट करते हैं

$$l\,\mathbf{a}+m\mathbf{b}+n\mathbf{c}=0. \quad \ldots(1)$$

और $$l+m+n=0 \quad \ldots(2)$$

l से भाग देने पर

$$\mathbf{a}+\frac{m}{l}\mathbf{b}+\frac{n}{l}\mathbf{c}=0, \quad \ldots(3)$$

$$1+\frac{m}{l}-\frac{n}{l}=0, \quad \ldots(4)$$

माना $\frac{n}{l}=-t$, तो $\frac{m}{l}=1-t$,

(3) में मान रखने पर

$$\mathbf{a}+(t-1)\,\mathbf{b}-t\mathbf{c}=0, \quad \ldots(5)$$

(5) से स्पष्ट है कि **b**, और **c** में से हो कर जाने वाली रेखा पर **a** स्थित है अर्थात् **a**, **b**, **c** समरेख हैं।

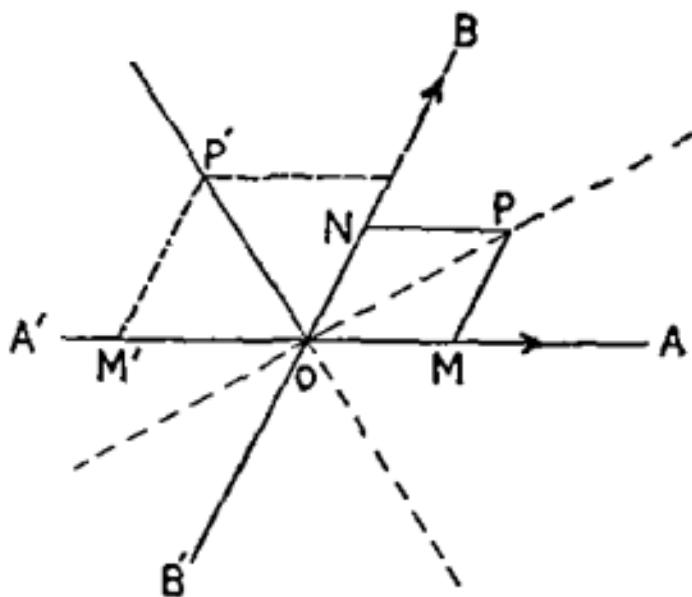
नोट—इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम अनु० 1.11 का भी प्रयोग कर सकते हैं।

3.5 दो रेखाओं के बीच के कोण का अर्धक ज्ञात करना

AOA′ और BOB′ दो सरल-रेखाएं हैं जो O पर एक दूसरे को काटती हैं। OP और OP′ क्रमश: ∠AOB और ∠BOA′ के अर्धक हैं।

माना विन्दु O के सापेक्ष OA और OB की दिशाओं में इकाई सदिश क्रमश:

$\hat{\mathbf{a}}$ और $\hat{\mathbf{b}}$ है।

P अर्धक OP पर कोई विन्दु है। P से $\overrightarrow{OA}$ और

$\overrightarrow{OB}$ के समानान्तर PM और PN खीचो

$\therefore$ OP, $\angle AOB$ का अर्धक है

$\therefore \angle POM = \angle PON = \angle OPM.$

अत $PM = OM.$ ... (1)

अब $\overrightarrow{OM}$, इकाई सदिश $\hat{a}$ की दिशा मे है और PM, OB के समानान्तर है।

$$\therefore \overrightarrow{OM} = t\hat{a}, \overrightarrow{PM} = t\hat{b}, \quad ...(2)$$

माना P का स्थिति-सदिश r है। तो

$$\overrightarrow{OP} = r = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = t\hat{a} + t\hat{b}$$

$$\text{या} \quad r = t(\hat{a} + \hat{b}) \quad ....(3)$$

जैसे ही P सरल रेखा OP पर विचरण करता है t का मान भी बदलता जाता है। अत (3) अर्धक का अभीष्ट समीकरण है।

नोट (1) यदि $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ की दिशा मे इकाई-सदिश के स्थान पर सदिश **a** और **b** दिए हुए हो तो अर्धक का समीकरण निम्न होगा—

$$\mathbf{r}=t\left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right) \qquad ....(4)$$

क्योंकि $\hat{\mathbf{a}}=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, और $\hat{\mathbf{b}}=\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$.

(2) OP′ कोण A′OB का अर्धक है और OA′, व OB की दिशाओं में इकाई-सदिश $-\hat{\mathbf{a}}$ व $\hat{\mathbf{b}}$ हैं। इसलिए अर्धक OP′ का समीकरण

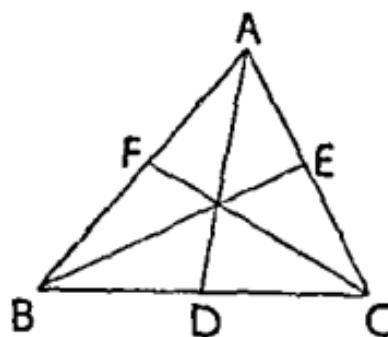
$\mathbf{r}=t\,(\hat{\mathbf{b}}-\hat{\mathbf{a}})$ है। ....(5)

उदाहरण 1.

सिद्ध करो कि त्रिभुज की माध्यिकाएं एक बिन्दु पर मिलती हैं, जो प्रत्येक को 2 1 के अनुपात मे विभाजित करता है।

[लखनऊ 52, 58, 60, 62, 63, आगरा 52, 55, 62, दिल्ली 61]

मानाकि A, B, C शीर्षों के स्थिति-सदिश, किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष क्रमशः

a, b, c हैं। तो D, E, F भुजाओ के मध्य-बिन्दुओं के स्थिति-सदिश क्रमश.

$\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}$, $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$ होंगे।

माध्यिकाएं AD, BE के समीकरण

क्रमशः

$$\mathbf{r}=(1-t)\,\mathbf{a}+t\,\frac{(\mathbf{b}+\mathbf{c})}{2}. \qquad ....(1)$$

और $\mathbf{r}=(1-s)\ \mathbf{b}+s\left(\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}\right)$ ... (2)

(1) और (2) का प्रतिच्छेद-विन्दु प्राप्त करने के लिए

$$(1-t)\ \mathbf{a}+t\ (\frac{+\mathbf{c}}{2})=(1-s)\ \mathbf{b}+s\frac{(\mathbf{c}+\mathbf{a})}{2}$$

या $(1-t-\frac{s}{2})\ \mathbf{a}+(\frac{t}{2}+s-\ )\ \mathbf{b}+(\frac{t}{2}-\frac{s}{2})\mathbf{c}=0$ 3

a, **b**, **c** के गुणाको को शून्य रखने पर

$$1-t-\frac{s}{2}=0. \quad ....(4)$$

$$\frac{t}{2}+s-1=0. \quad ....(5)$$

$$\frac{t}{2}-\frac{s}{2}=0. \quad ....(6)$$

(6) से $t=s$. ....(7)

(7) और (5) से

$t=\frac{2}{3}=s$. ....(8)

(8) से (1) मे t का मान या (2) मे s का मान रखने पर

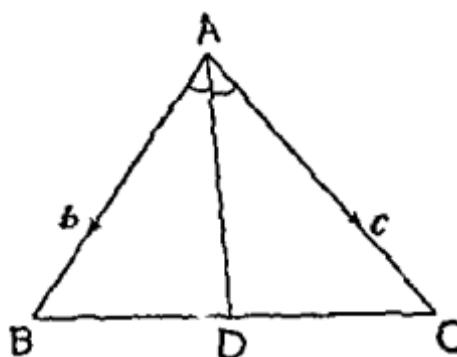
$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}. \quad ....(9)$$

सममिति से स्पष्ट है कि माध्यिका AD और CF का भी प्रतिच्छेद-विन्दु $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$ ही है।

अत: तीनो माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु पर मिलती हैं।

2 सिद्ध करो कि त्रिभुज ABC मे कोण A का अन्त: समद्विभाजक सम्मुख भुजा BC को AB : AC के अनुपात में बाँटता है।

[लखनऊ 53, कलकत्ता 53, 60, पजाब 60]

मूलविन्दु A के सापेक्ष, माना B और C के स्थिति-सदिश क्रमश **b** और **c** हैं।

$\angle$A के समद्विभाजक AD का समीकरण

$$\mathbf{r}=t\left(\frac{\mathbf{b}}{b}+\frac{\mathbf{c}}{c}\right) \text{ है।}$$

$$\text{या } \mathbf{r}=\frac{t}{bc}(c\mathbf{b}+b\mathbf{c}) \quad \text{....(1)}$$

भुजा BC का समीकरण

$$\mathbf{r}=(1-s)\,\mathbf{c}+s\mathbf{b}. \quad \text{....(2)}$$

(1) और (2) से

$$(1-s)\,\mathbf{c}+s\mathbf{b}=t\,\left(\frac{\mathbf{b}}{b}+\frac{\mathbf{c}}{c}\right). \quad \text{....3}$$

दोनों पक्षों से b और c के गुणाकों की तुलना करने पर

$$1-s=t/c, \quad \text{....(4)}$$

$$s=t\,b, \quad \text{....(5)}$$

$$\text{या } t=\frac{bc}{b+c} \quad \text{....(6)}$$

(1) में t का मान रखने पर, बिन्दु D का स्थिति-सदिश

$$=\frac{1}{b+c}(c\mathbf{b}+b\mathbf{c}), \quad \text{....(7)}$$

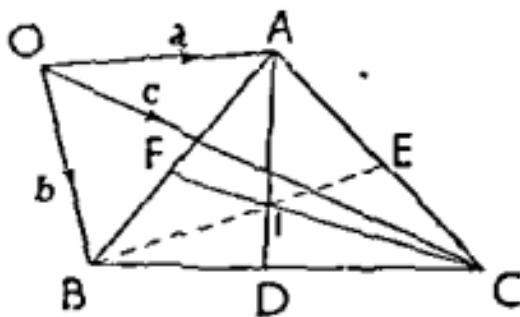
अर्थात् बिन्दु D, BC को $b : c$ के अनुपात में बाँटता है।

नोट:—कोण A का बाह्य समद्विभाजक भी BC को $b : c$ के अनुपात में बाँटता है।

3 सिद्ध करो कि त्रिभुज के कोणों के अन्त. समद्विभाजक सगामी हैं।

[लखनऊ 53, 62, 65, आगरा 52, 54, 57, बिहार 61, दिल्ली 55, राज० 49]

माना A, B, C के स्थिति-सदिश, मूलबिंदु O के सापेक्ष **a**, **b**, **c**, हैं और भुजाओं BC, CA, AB की क्रमशः लम्बाई *a*, *b*, *c* है।

यदि AD कोण A का अन्त समद्विभाजक है तो

$$\overrightarrow{OD} = \frac{b\mathbf{b} + c\mathbf{c}}{b+c} \quad \ldots(1)$$

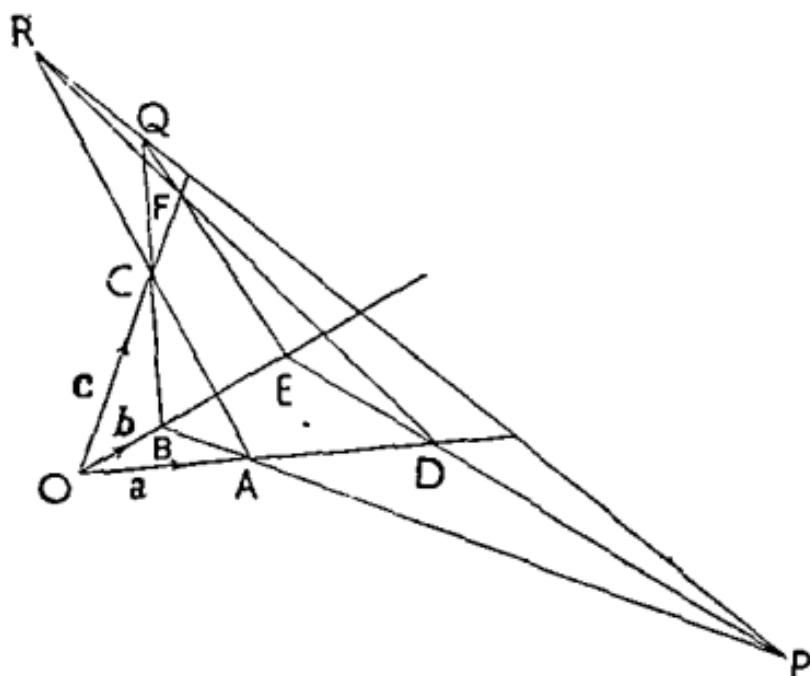
$\overrightarrow{AD}$ पर I ऐसा बिन्दु लो जो AD को $b+c : a$ के अनुपात मे बांटता है।

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a\mathbf{a} + (b+c)\dfrac{(b\mathbf{b}+c\mathbf{c})}{b+c}}{a+b+c}$$

$$= \frac{a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}}{a+b+c} \quad \ldots(2)$$

(2) मे सममिति से स्पष्ट है कि बिन्दु I कोण B और C के अन्त समद्विभाजकों पर भी स्थित है।

4 तीन सगामी रेखाएं OA, OB, OC बिन्दु D, E, F तक बढ़ाई गई हैं तो सिद्ध करो कि रेखाओं AB, DE; BC, EF; और CA, FD के प्रतिच्छेद-बिन्दु समरेख हैं।

[लखनऊ 64]

हल:–माना AB और DE; BC और EF; CA और FD के प्रतिच्छेद-बिन्दु P, Q, R हैं।

माना मूलबिन्दु O के सापेक्ष A, B, C और P, Q, R के स्थिति-सदिश क्रमश: **a**, **b**, **c**, और $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ हैं।

और $\overrightarrow{OD}=k_1\,\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OE}=k_2\,\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OF}=k_3\,\mathbf{c}$.

जबकि k_1, k_2, k_3 तीन अदिश-राशिया हैं। अब

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}. \qquad \text{....(1)}$$

$$\overrightarrow{DE}=k_2\mathbf{b}-k_1\mathbf{a}. \qquad \text{....(2)}$$

P. $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{DE}$ दोनो पर स्थित है

$$\therefore \overrightarrow{OP}=\vec{P}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}+s\overrightarrow{DE}.$$

$$=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})=k_1\mathbf{a}+s(k_2\mathbf{b}-k_1\mathbf{a}). \qquad \text{....(3)}$$

दोनो ओर से **a**, **b** के गुणांकों की तुलना करने से हमें प्राप्त है

$$\left.\begin{array}{l} 1-t=k_1(1-s). \\ \text{और } t=k_2 s. \end{array}\right\} \qquad ....(4)$$

$$\therefore s=\frac{1-k_1}{k_2-k_1}, \text{ और } t=\frac{k_2(1-k_1)}{k_2-k_1} \qquad ...(5)$$

(3) मे मान रखने पर

$$\vec{p}=a+\frac{k_2(1-k_1)}{k_2-k_1}(b-a). \qquad ...(6)$$

इसी प्रकार

$$\vec{q}=b+\frac{k_3(1-k_2)}{k_3-k_2}(c-b). \qquad ..(7)$$

$$\vec{r}=c+k_1\frac{(1-k_3)}{(k_1-k_3)}(a-b). \qquad ....(8)$$

(5), (6) और (7) से

$$\vec{p}-\vec{q}=\frac{1-k_2}{1-k_3}(\vec{q}-\vec{r}).$$

या $\overrightarrow{QP}=k.\overrightarrow{RQ}.$ $\left[\frac{1-k_2}{1-k_3}=K\right]$

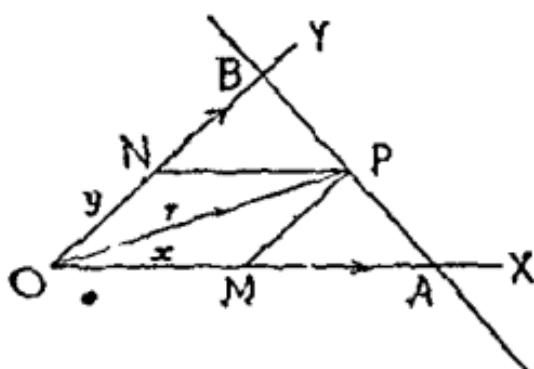
$\therefore$ P, Q, R समरेख है

5. सदिश विधि मे सरल रेखा के समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ की स्थापना करो जबकि अक्ष, प्रायतीय या तिर्यक हो।

माना OX और OY निर्देशाक-अक्ष हैं और एक रेखा इनको A और B पर काटती है।

यदि $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ की दिशाओं मे इकाई-सदिश $\hat{a}$ और $\hat{b}$ हो तो

$\overrightarrow{OA}=a\,\hat{a},$

$\overrightarrow{OB}=b\,\hat{b}$

सरल रेखा पर कोई बिन्दु P लो।

माना P के निर्देशांक (x, y) हैं और सदिश $\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}$, तो

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$.

$\mathbf{r}=x\hat{a}+y\hat{b}$ .. (1)

[∵ PM‖OY और PN‖OX]

रेखा AB का सदिश समीकरण होगा।

$\mathbf{r}=(1-t)\,a\hat{a}+tb\hat{b}$. ...(2)

(1) और (2) से

$x=a(1-t)$. ...(3)

$y=bt$. ....(4)

(3) और (4) से

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-t+t=1. \quad ....(3)$$

जोकि अभीष्ट समीकरण है।

6. बिन्दु $(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$ और $(3\mathbf{k}-2\mathbf{j})$ को मिलाने वाली रेखा का सदिश-समीकरण ज्ञात करो।

[आगरा 55, लखनऊ 62, कलकत्ता 62]

माना A और B दो बिन्दु हैं जिनके स्थिति-सदिश क्रमश:

$(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$ और $(3\mathbf{k}-2\mathbf{j})$ हैं।

$$\overrightarrow{AB}=(3\mathbf{k}-2\mathbf{j})-(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}).$$
$$=2\mathbf{k}-\mathbf{i}. \quad \text{....(1)}$$

A और B को मिलाने वाली सरल-रेखा सदिश $\overrightarrow{AB}$ के समानान्तर होगी और बिन्दु A में से होकर आएगी।

∴ इसका समीकरण

$$\mathbf{r}=(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})+t\,(2\mathbf{k}-\mathbf{i}).$$

या $\mathbf{r}=(1-t)\,\mathbf{i}-2\mathbf{j}+(1+2t)\,\mathbf{k}$. है ....(2)

7. सिद्ध करो कि किसी चतुर्भुज के तीनों विकर्णों के मध्य-बिन्दु समरेख होते हैं। [राज० 56]

माना ABCD एक चतुर्भुज है और P, Q, R क्रमशः विकर्ण AC, BD और EF (AB और CD, तथा BC और के कटान-बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल-रेखा) के मध्य-बिन्दु हैं।

मूलबिन्दु A के सापेक्ष माना B और D के स्थिति-सदिश क्रमशः $\mathbf{b}$ और $\mathbf{d}$ हैं।

$$\overrightarrow{AE}=k_1\,\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{AF}=k_2\,\mathbf{d}.$$

$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\mathbf{d}-k_1\,\mathbf{b} \quad \text{...(1)}$$

$$\overrightarrow{CD}=p\,\overrightarrow{ED}=p\,(\mathbf{d}-k_1\mathbf{b}), \quad \text{....(2)}$$

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=(k_2\mathbf{d}-\mathbf{b}), \quad \text{....(3)}$$

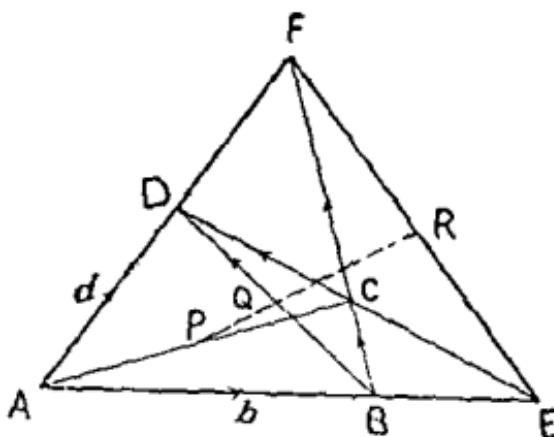
$$\overrightarrow{BC}=q\overrightarrow{BE}=q(k_2\mathbf{d}-\mathbf{b}). \quad \text{....(4)}$$

(k_1, k_2, p, q अदिश गुणांक हैं)

अब $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.$

या $q\,(k_2\mathbf{d}-\mathbf{b})+p(\mathbf{d}-k_1\mathbf{b})$

$=\mathrm{d}-\mathrm{b}.$ ....(5)

दोनो ओर से d और b के गुणांकों की तुलना करने पर

$qk_2+p=1.$ ....(6)

$q+k_1p=1.$ ....(7)

(6) और (7) से

$p=\dfrac{1-k_2}{1-k_1k_2}$, और $q=\dfrac{1-k_1}{1-k_{12}}$ ....(8)

$$\overrightarrow{AP}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\tfrac{1}{2}\left[\mathrm{b}+\frac{1-k_1}{1-k_1k_2}(K_2\mathrm{d}-\mathrm{b})\right]$$

$$=\frac{k_1(1-k_2)\mathrm{b}+k_2(1-k_1)\mathrm{d}.}{2(1-k_1k_2)} \quad ....(9)$$

$$\overrightarrow{AQ}=\tfrac{1}{2}(\mathrm{b}+\mathrm{d}). \quad ....(10)$$

$$\overrightarrow{AR}=\tfrac{1}{2}(k_1\mathrm{b}+k_2\mathrm{d}).$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2(1-k_1k_2)}[(1-k_1)\mathrm{b}+(1-k_2)\mathrm{d}] \quad ..(11)$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{k_1k_2}{2(1-k_1k_2)}\,[(1-k_1)\mathrm{b}+(1-k_2)\mathrm{d}] \quad .(12)$$

(11) और (12) से

$PR = k_1 k_2 \overrightarrow{PQ}$.

अत: P, Q, R एकरेखस्थ हैं।

8. सदिश की विधि से सिद्ध करो कि एक समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ आपस मे बराबर होती हैं और इसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाग करते हैं। [लखनऊ 57, 63, आगरा एम. एस. सी. 63]

माना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है और इसके विकर्ण AC व BD का प्रतिच्छेद-बिन्दु P है।

माना $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{AD}$ क्रमश सदिश **a** और **b** निरूपित करते हैं

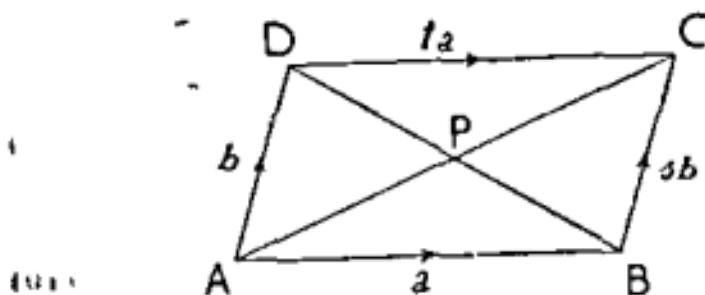
$\because \overrightarrow{BC} \parallel AD$ और $DC \parallel AB$

$\therefore \overrightarrow{BC} = s\mathbf{b}$, और $\overrightarrow{DC} = t\mathbf{a}$.

[t और s अदिश हैं।]

अत: $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + s\mathbf{b} = \mathbf{b} + t\mathbf{a}$.

या $\mathbf{a} + s\mathbf{b} = \mathbf{b} + t\mathbf{a}$. ...(1)

(1) से

$t = s = 1$ ... (2)

अत: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, और $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$

अर्थात् AB=DC और AD=BC

पुनः $\overrightarrow{AC}$ और $\overrightarrow{BD}$ के समीकरण

$\mathbf{r}=t_1(\mathbf{b}+\mathbf{a})$. ....(3)

और $\mathbf{r}=t_2\mathbf{a}+(1-t_2)\mathbf{b}$. ....(4)

(3) और (4) मे AC और BD का प्रतिच्छेद-बिन्दु P के लिए

$t_1(\mathbf{b}+\mathbf{a})=t_2\mathbf{a}+(1-t_2)\mathbf{b}$. ....(5)

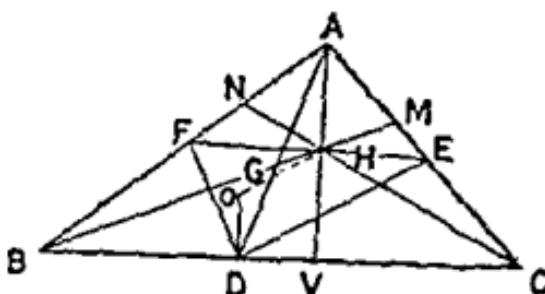
$\therefore\ t_1=t_2=1/2$ ....(6)

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

अत. P, AC और BD का मध्य-बिन्दु है।

9. किसी त्रिभुज के परिकेन्द्र (circum-centre) लंबकेन्द्र (ortho centre) और केन्द्रक (centroid) के स्थिति-सदिश, त्रिभुज के शीर्षों के सदिशों के पदों मे ज्ञात करो। [दिल्ली '57, लखनऊ 61]

अत: सिद्ध करो कि केन्द्रक, परिकेन्द्र और लम्बकेन्द्र को मिलाने वाली रेखा का समत्रिभाजन करता है।

माना A, B, C के स्थिति-सदिश किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष क्रमशः $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ हैं।

O, H और G क्रमशः त्रिभुज के परिकेन्द्र, लम्बकेन्द्र और केन्द्रक हैं।

D, E, F भुजा BC, CA, AB के मध्य-बिन्दु हैं और L, M, N शीर्ष A, B, C से संमुख भुजाओं पर लम्ब-पाद हैं।

चूँकि लम्ब-केन्द्र A, B, C का केन्द्रक (centroid) है यदि उनके सहचारी अंक क्रमशः tan A, tan B, tan C हों। तो

H का स्थिति-सदिश

$$=\frac{\tan A.a+\tan B.b+\tan C.c}{\tan A+\tan B+\tan C}.\quad \text{....(1)}$$

अब परिकेन्द्र O त्रिभुज DE F का लम्ब-केन्द्र है।

किन्तु D, E, F के स्थिति-सदिश क्रमश

$\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}$ हैं।

इसलिए O का स्थिति-सदिश

$$=\frac{\tan A.\ \frac{(b+c)}{2}+\tan B\frac{(c+a)}{2}+\tan C\frac{(a+b)}{2}}{\tan A+\tan B+\tan C}\quad \text{....(2)}$$

केन्द्रक G का स्थिति-सदिश

$$\vec{OG}=\frac{a+b+c}{3}.\quad \text{....(3)}$$

माना बिन्दु G′, $\vec{OH}$ को 1:2 के अनुपात में बांटता है। तो G′ का स्थिति-सदिश =

$$\frac{1.\ \frac{\Sigma(\tan A\ a)}{\Sigma \tan A}+2.\frac{\Sigma(\tan A\ \frac{b+c}{2})}{\Sigma \tan A}}{3}$$

$$=\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)}{\tan A+\tan B+\tan C}.\frac{a+b+c}{3}$$

$$=\frac{a+b+c}{3}=\vec{OG}.\ (3\ \text{से})$$

अत. बिन्दु G′, त्रिभुज ABC के केन्द्रक G का संपाती है

अतः O, G, H समरेख हैं और G, OH का समत्रिभाजन करता है।

प्रश्नावली 4

1. बिन्दु $(i-2j+k)$ और $(2i+k)$ में से होकर जाने वाली सीधी रेखा का समीकरण ज्ञात करो। [लखनऊ 54]

2. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज के एक कोण का अन्तः समद्विभाजक और दूसरे दो कोणों के बाह्य समद्विभाजक संगामी होते हैं।
[राज० 49, बिहार 62]

3. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली सीधी रेखा तीसरी भुजा के समान्तर और उसकी आधी होती है।
[आगरा 56, राज० 60, विक्रम 62]

4. M और N किसी समांतर-चतुर्भुज की भुजा AB और CD के मध्य-बिन्दु हैं। यदि DM और BN को मिला दिया जाय, तो सिद्ध करो कि DM और BN विकर्ण AC को तीन बराबर अन्तः खण्डों मे विभक्त करती है और AC भी इनको समत्रिभाजित करती है।
[लख० 51, 58, राज० 60, विक्रम 61, गोरखपुर 67]

5. सिद्ध करो कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाग करते हैं।

   विलोमतः यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाग करें तो वह समान्तर चतुर्भुज होगा।
[आगरा 63, गोरखपुर 67, राज० 59, लखनऊ 54, 57]

6. किसी समलम्ब (trapezium) की दो असमान्तर भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, समान्तर भुजाओं के समांतर और उनके योग की आधी होती है। [आगरा 66, 67]

7. सिद्ध करो कि किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को क्रम से मिलाने वाली रेखाएं समान्तर-चतुर्भुज बनाती हैं। [लखनऊ 48]

8. सिद्ध करो कि किसी समलंब के विकर्णों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उसकी समान्तर भुजाओं के समान्तर और उनके अन्तर की आधी होती है।

9. किसी वृत्त की दो जीवाएं APB और CPD एक-दूसरे को समकोण

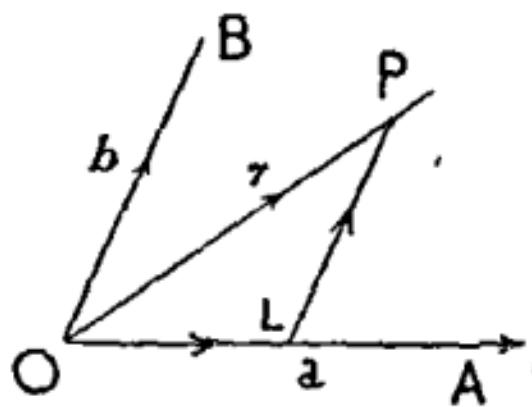
पर काटती हैं । सिद्ध करो कि $\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}$ और $\vec{PD}$ का परिणामित $2\vec{PO}$ है । जबकि O वृत्त का केन्द्र है ।

10. यदि बिन्दु P का स्थिति-सदिश किसी स्थिर बिन्दु O के सापेक्ष $\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ है, जबकि t चर है । तो सिद्ध करो कि P का बिन्दु-पथ एक सरल-रेखा है । [लखनऊ 47]

11. यदि किसी बिन्दु O को समान्तर चतुर्भुज के शीर्षों से मिला दिया जाय तो इन शीर्षों के सदिशों का योग, विकर्णों के प्रतिच्छेद-बिन्दु के सदिश के चार गुणा होगा ।

3 6 समतल का सदिश-समीकरण ज्ञात करना (Vector equation of a plane)

(1) उस समतल का समीकरण ज्ञात करना जो दो सदिशों $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ के समान्तर हो और मूलबिन्दु से हो कर जाय

माना मूलबिन्दु O के सापेक्ष दो दिए हुए बिन्दु A और B के स्थिति-सदिश $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ हैं । और माना समतल पर कोई बिन्दु P है जिसका स्थिति-सदिश $\mathbf{r}$ है ।

$\vec{OP}$, $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ समतलीय हैं इसलिए $\vec{OP}$ का $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ के समान्तर घटकों में विघटन किया जा सकता है ।

रेखा PL, OB के समान्तर खीचो जो OA को L पर मिलती है

$\vec{OL}$ और $\vec{OA}$ समरेख हैं

$\therefore \ \overrightarrow{OL} = s\,\mathbf{a}.$

और $\overrightarrow{LP} = t.\,\mathbf{b}.$

जबकि s और t अदिश हैं

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$

s और t चरप्राचल (parameters) है जोकि P के समतल पर विचरण करने पर बदलते हैं।

अतः समतल का समीकरण

$\mathbf{r} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ है। ...(1)

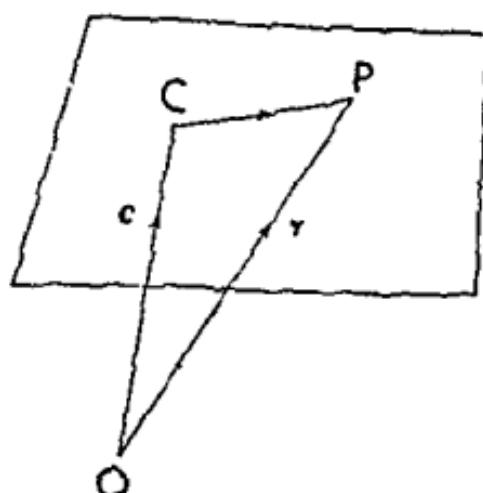
(2) उस समतल का समीकरण ज्ञात करना जो दो सदिशों **a** और **b** के समान्तर है और बिन्दु C से होकर जाय। *[आगरा 42]*

मूलबिन्दु O के सापेक्ष, माना बिन्दु C का स्थिति-सदिश **c** है।

माना अभीष्ट समतल पर P कोई बिन्दु है जिसका स्थिति-सदिश **r** है।

चूँकि समतल **a** और **b** में से होकर जाता है इसलिए **a**, **b** और $\overrightarrow{CP}$ समतलीय है। तो

$\overrightarrow{CP} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$ ....(1)

(s और t वास्तविक संख्या है)

अब $\vec{OP} = r = \vec{OC} + \vec{CP}$.

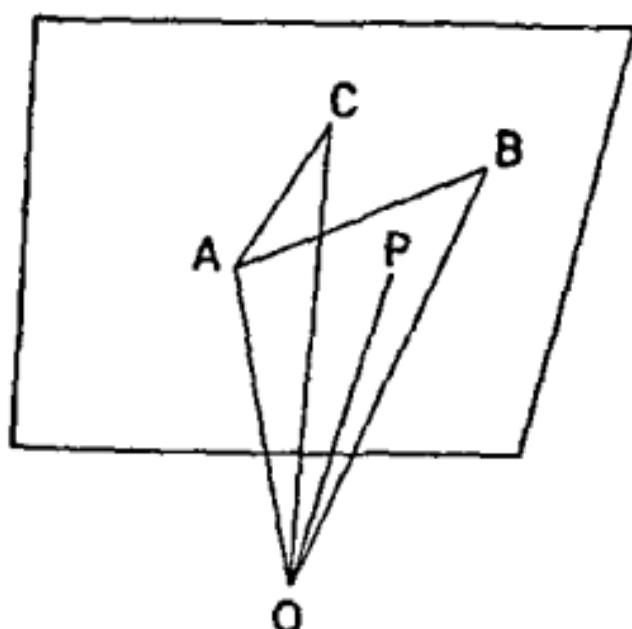
या $r = c + sa + tb.$ ....(2)

समीकरण (2) समतल का अभीष्ट समीकरण है जिसमे s और t चरप्राचल हैं।

(3) तीन बिन्दुओ मे से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करना।

माना A, B, C तीन बिन्दु हैं जिनके स्थिति-सदिश क्रमशः a, b, c हैं और O मूलबिन्दु है। तो

$\vec{AB} = b - a.$

$\vec{AC} = c - a.$

अतः अभीष्ट समतल $\vec{AB}$ और $\vec{AC}$ के समान्तर है और बिन्दु A से होकर जाता है

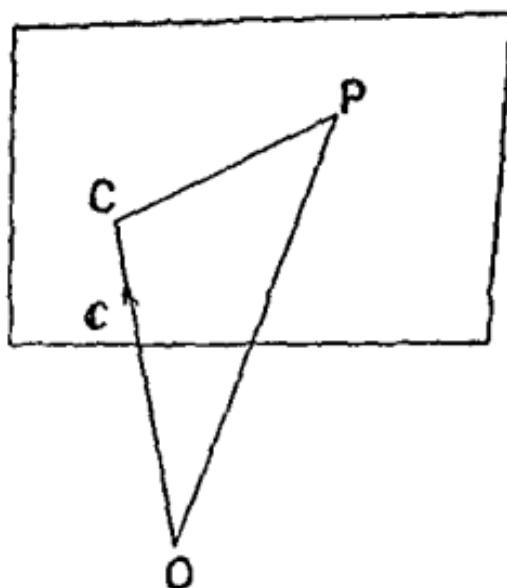
∴ इसका समीकरण ऊपर (2) से

$r = a + s(b - a) + t(c - a)$ है।

या $\mathbf{r} = (1-s-t)\,\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$. ....(3)

(4) उस समतल का समीकरण ज्ञात करना जो विन्दु A और B से गुजरे और सदिश c के समान्तर हो

माना A, B, C के स्थिति-सदिश a, b और c है और O मूल-विंदु है। तो

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. ...(1)

∴ समतल $\overrightarrow{AB}$ और c के समान्तर है और विन्दु A इस पर स्थित है। अत: ऊपर (2) से समतल का समीकरण

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t\,\mathbf{c}$.

या $\mathbf{r} = (1-s)\,\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$. ....(4)

समतल के समीकरण (1) से (4) तक में हम देखते है कि इनमे दो चर अदिश राशिया s और t है। आगे हम समतल का समीकरण

3.7 आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध कि चार विन्दु समतलीय हों। (Necessary and sufficient condition that four points are Coplanar.)

त्रिविमितीय (3–D) अवकाश मे कोई चार विन्दु समतलीय हो तो

उसके लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि उनके स्थिति-सदिशो में एकघातत. सम्बन्ध हो जिसमे उनके अदिश गुणाको का बीजीय योग शून्य हो।

अर्थात्

चार बिन्दु, जिनके स्थिति-सदिश **a**, **b**, **c**, **d** हैं समतलीय होंगे यदि हम चार अदिश l, m, n, p, ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि

$l\mathbf{a}+m\mathbf{b}+n\mathbf{c}+p\mathbf{d}=0.$

और $l+m+n+p=0.$

(l, m, n, p सब शून्य न हो)

(i) प्रतिबन्ध आवश्यक है —

माना **a**, **b**, **c**, **d** चार बिन्दु A, B, C, D के मूलबिन्दु O के सापेक्ष स्थिति-सदिश हैं।

तीन बिन्दु A, B, C मे से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$\mathbf{r}=(1-s-t)\,\mathbf{a}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}$ है। ... (1)

यदि बिन्दु D समतल पर स्थित है तो वह समीकरण (1) को संतुष्ट करेगा।

$\therefore\ \mathbf{d}=(1-s-t)\,\mathbf{d}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}.$

या $(1-s-t)\,\mathbf{a}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}-\mathbf{d}=0.$ ....(2)

a, **b**, **c**, **d** के गुणाको का बीजीय योग

$=\ 1-s-t+s+t-1=0.$

अत प्रतिबन्ध आवश्यक है।

(ii) प्रतिबन्ध पर्याप्त है :—

माना चार बिन्दु A, B, C, D जिनके स्थिति-सदिश क्रमश. **a**, **b**, **c**, *d* हैं वे निम्न प्रकार से सम्बन्धित है

$l\mathbf{a}+m\mathbf{b}+n\mathbf{c}+p\mathbf{d}=0,$ ....(3)

और $l+m+n+p=0.$ ....(4)

p से भाग देने पर $(p\neq 0)$

$$d=\ \frac{-l}{p}\mathbf{a}\ -\frac{m}{p}\mathbf{b}\ -\frac{n}{p}\mathbf{c}, \quad ....(5)$$

और $\frac{l}{p}+\frac{m}{p}+\frac{n}{p}+1=0.$ ....(6)

माना $\frac{m}{p}=-s$ और $\frac{n}{p}=-t$ लो

$\frac{l}{p}=-(1-s-t).$

(5) में मान रखने पर

$\mathbf{d}=(1-s-t)\mathbf{a}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}.$ ... (7)

(7) से स्पष्ट है कि बिन्दु A, B, C में से होकर जाने वाले समतल पर D स्थित है। अतः बिन्दु A, B, C, D समतलीय है।

उदाहरण नं० 1.

बिन्दु 4**j** और $(2\mathbf{i}+\mathbf{k})$ तथा मूलबिन्दु में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करो। और बिन्दुओं $(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $(3\mathbf{k}-2\mathbf{j})$ को मिलाने वाली रेखा इस समतल को जिस बिन्दु पर काटती है वह ज्ञात करो। [आगरा 56, 65, लखनऊ 62]

मूलबिन्दु तथा 4**j** और $(2\mathbf{i}+\mathbf{k})$ में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$\mathbf{r}=s(4\mathbf{j})+(2\mathbf{i}+\mathbf{k})\,t$ है। ....(1)

बिन्दुओं $(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$ और $(3\mathbf{k}-2\mathbf{j})$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$\mathbf{r}=(1-p)\,(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})+p(3\mathbf{k}-2\mathbf{j})$ है। ....(2)

(1) और (2) के प्रतिच्छेद-बिन्दु के लिए

$4s\mathbf{j}+(2\mathbf{i}+\mathbf{k})t=(1-p)\,(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})+p(3\mathbf{k}-2\mathbf{j}).$

दोनों ओर से **i**, **j**, **k** के गुणांकों की तुलना करने पर

$2t=1-p.$ ....(3)

$t=1-p+3p=1+2p.$ ....(4)

$4s=-2+2p-2p=-2.$ ....(5)

या $s=-\frac{1}{2},$ ....(6)

$t=\frac{3}{5},\quad p=-\frac{1}{5}$ ....(7)

$\therefore$ (1) और (2) का प्रतिच्छेद-बिन्दु (1), (6) (7) से

$-2\mathbf{j}+(2\mathbf{i}+\mathbf{k})\frac{3}{5}$ या $(\frac{6}{5}\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\frac{3}{5}\mathbf{k})$ है।

2. सिद्ध करो कि निम्न चार बिन्दु समतलीय हैं।

$6\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $2\mathbf{a}-\mathbf{b}+3\mathbf{c}$, $-\mathbf{a}+2\mathbf{b}-4\mathbf{c}$ और $-12\mathbf{a}-\mathbf{b}-3\mathbf{c}$.

हल.–पहले तीन बिन्दुओं में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$r=(1-s-t)(6\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c})+s(2\mathbf{a}-\mathbf{b}+3\mathbf{c})+$

$t(-\mathbf{a}+2\mathbf{b}-4\mathbf{c})$ है। ....(1)

बिन्दु $(-12\mathbf{a}-\mathbf{b}-3\mathbf{c})$ इस पर स्थित है इसलिए यह समीकरण (1) को सन्तुष्ट करेगा

$\therefore\ -12\mathbf{a}-\mathbf{b}-3\mathbf{c}=(1-s-t)(6\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c})+$

$s(2\mathbf{a}-\mathbf{b}+3\mathbf{c})+t(-\mathbf{a}+2\mathbf{b}-4\mathbf{c})$

दोनों ओर से a, b, c के गुणाकों की तुलना करने से

$-12=6(1-s-t)+2s-t=6-4s-7t$ ....(2)

$-1=2(1-s-t)-s+2t=2-3s$ ....(3)

$-3=-(1-s-t)+3s-4t=-1+4s-3t$ ....(4)

(3) से $s=1$; (2) से $t=2$,

$s=1$, और $t=2$ समीकरण (4) को सतुष्ट करते हैं।

चारो बिन्दु समतलीय हैं।

करो कि बिन्दु $(2,-3,-1)$ और $(8,-1,2)$ को मिलाने रेखा का समीकरण

$x-2)=\frac{1}{2}(y+3)=\frac{1}{3}(z+1)$ है।

दो बिन्दु ऐसे ज्ञात करो जिनकी A से दूरी 14 है।

माना x, y, z की दिशा मे इकाई-सदिश क्रमश: $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$, हैं

A और B में से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$(x\hat{a}+y\hat{b}+z\hat{c})=r=(1-t)(2\hat{a}-3\hat{b}-\hat{c})+t(8\hat{a}-\hat{b}+2\hat{c})$ है । ....(1)

दोनों ओर से $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ के गुणांकों को तुलना करने से

$$\left.\begin{aligned} x&=2(1-t)+8t=2+6t, \\ y&=-3(1-t)-t=-3+2t, \\ z&=(t-1)+2t=3t-1, \end{aligned}\right\} \quad ....(2)$$

(2) से

$$\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}=t.$$

यह सरल रेखा का अभीष्ट समीकरण है

अब इस रेखा पर किसी PA बिन्दु के निर्देशांक

$(6t+2, 2t-3, 3t-1)$ है ।

तो $PA^2=14^2=(6t+2-2)^2+(2t-3+3)^2+(3t-1+1)^2=49t^2$

या $t=\pm 2$.

$\therefore$ P के निर्देशांक$=(14, 1, 5)$ या $(-10, -7, -7)$ हैं ।

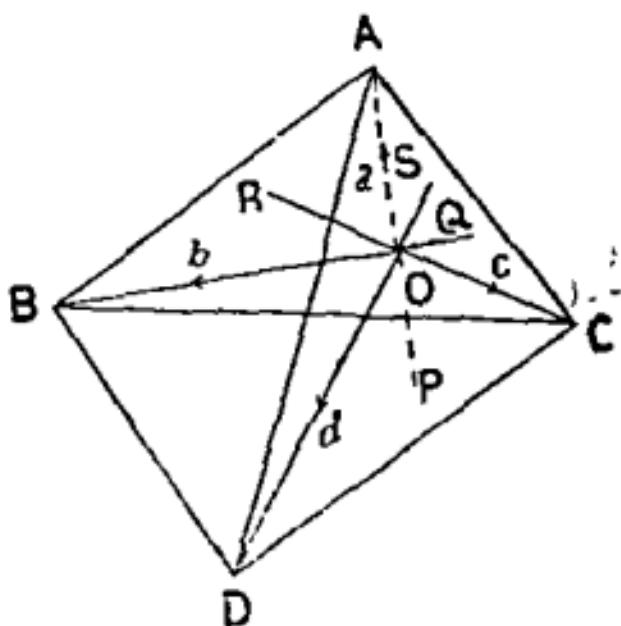
4. किसी चतुष्फलक (tetrahedron) ABCD के शीर्षों को किसी बिन्दु O से मिला कर AO, BO, CO, DO को बढ़ा दिया तो वे सम्मुख तलों को क्रमश: P, Q, R, S पर काटती है ।

सिद्ध करो कि

$$\Sigma \frac{OP}{AP}=1. \qquad \text{[आगरा 53, 58, 61]}$$

माना बिन्दु O के सापेक्ष A, B, C, D के स्थिति-सदिश क्रमश: **a**, **b**, **c**, **d** हैं । इन सदिशों मे से किसी एक को शेष तीनों मे अभिव्यक्त कर सकते हैं । इसलिए इन चारो में एकघाततः सम्बन्ध है जिसको हम निम्न प्रकार से लिख सकते है ।

$$l\mathbf{a}+m\mathbf{b}+n\mathbf{c}+p\mathbf{d}=0 \quad ... (1)$$

$\because$ बिन्दु P, AO पर स्थित है

$\therefore\ \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = -k_1\,\mathbf{a}.$ (2)

(1) और (2) से प्राप्त है

$$\mathbf{r} = \frac{k_1}{l}(m\mathbf{b} + n\mathbf{c} + p\mathbf{d})$$

या $l\mathbf{r} - k_1\,(m\mathbf{b} + n\mathbf{c} + p\mathbf{d}) = 0.$ ..(3)

परन्तु बिन्दु P, B, C, D समतलीय हैं

$\therefore\ l - k_1\,(m + n + p) = 0$

या $k_1 = \dfrac{l}{m+n+p}.$ ..(4)

अत $\overrightarrow{OP} = -\dfrac{l}{m+n+p}\,\mathbf{a}.$ ..(5)

अब $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = -\mathbf{a} - \dfrac{l}{m+n+p}\,\mathbf{a}.$

$$= -\frac{l+m+n+p}{m+n+p}\,\mathbf{a}$$ ..(6)

(5) और (6) से

$$\frac{OP}{AP} = \frac{l}{l+m+n+p}.$$ (7)

इसी प्रकार

$$\frac{OQ}{BQ}=\frac{m}{l+m+n+p},$$ ....(8)

$$\frac{OR}{CR}=\frac{n}{l+m+n+p},$$ ....(9)

और $$\frac{OS}{DS}=\frac{p}{l+m+n+p}$$ ..(10)

अतः $\Sigma \frac{OP}{AP}=1.$

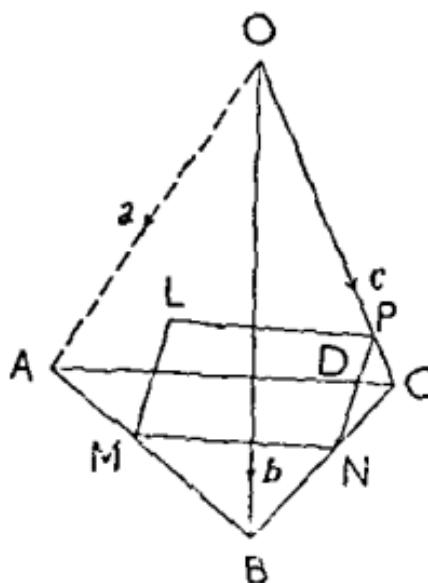
5. सदिश विधि से सिद्ध करो कि एक चतुष्फलक की दो सम्मुख भुजाओं के समान्तर समतल से इसका काट समान्तर-चतुर्भुज होगा

[पटना 51, उत्कल 54]

OABC एक चतुष्फलक है।

माना बिन्दु O के सापेक्ष, A, B, C के स्थिति-सदिश क्रमश: **a**, **b**, **c** हैं।

उस समतल का समीकरण जो $\vec{AC}$ और $\vec{OB}$ के समान्तर है किन्तु किसी बिन्दु D (=**d**) में से होकर जाय

$\mathbf{r}=\mathbf{d}+s(\mathbf{c}-\mathbf{a})+t\mathbf{b}$ है। ....(1)

समतल OAB का समीकरण

$\mathbf{r}=p\mathbf{a}+q\mathbf{b}$ है । ....(2)

(1) और (2) की प्रतिच्छेद-रेखा LM है । तो

a, b, c के गुणांकों की तुलना करने से

$p=-s,\ q=t,\ s=0$ ....(3)

∴ LM का समीकरण

$\mathbf{r}=\mathbf{d}_1+q\mathbf{b}$ है । ....(4)

[$\mathbf{d}_1$, LM पर कोई बिन्दु है]

समतल OBC का समीकरण

$\mathbf{r}=\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$ है । ....(5)

(1) और (5) की प्रतिच्छेद-रेखा के लिए

$\alpha=t,\ \beta=s=0$ ....(6)

∴ PN का समीकरण

$\mathbf{r}=\mathbf{d}_2+t\mathbf{b}$ ....(7)

(4) और (7) से स्पष्ट है कि LM तथा PN $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ के समानान्तर हैं । अर्थात् LM‖PN इस प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि LP‖MN / अत: LMNP एक समान्तर चतुर्भुज है ।

प्रश्नावली 5

1. सिद्ध करो कि निम्न बिन्दु समतलीय हैं

   (i) $(2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-\mathbf{c})$, $(\mathbf{a}-2\mathbf{b}+3\mathbf{c})$, $(3\mathbf{a}+4\mathbf{b}-2\mathbf{c})$ और $(2-6\mathbf{b}+6\mathbf{c})$

   (ii) $(6\mathbf{a}-4\mathbf{b}+10\mathbf{c})$, $(-5\mathbf{a}+3\mathbf{b}-10\mathbf{c})$, $(4\mathbf{a}-6\mathbf{b}-10\mathbf{c})$, $(2\mathbf{b}+10\mathbf{c})$ [कलकत्ता 61]

   (iii) $(-\mathbf{a}+4\mathbf{b}-3\mathbf{c})$, $(3\mathbf{a}+2\mathbf{b}-5\mathbf{c})$, $(-3\mathbf{a}+8\mathbf{b}-5\mathbf{c})$, $(-3\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c})$

(iv) (a − b − c), (a − 3b + 7c), (a + b − c), (a + b + c).

2. सिद्ध करो कि यदि तीन अंक x, y, z ऐसे ज्ञात किए जा सकते हैं कि $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=0$, तो सदिश **a**, **b**, **c** एक ही समतल के समान्तर होंगे। अत या अन्यथा सिद्ध करो कि (a − b + c), (2a − 3b), (a + 3c) एक ही समतल के समान्तर हैं। [दिल्ली 50]

3. बिन्दु (1, − 2, − 1) और (2, 3, 1) को मिलाने वाली रेखा का, बिन्दुओं (2, 1, − 3), (4, − 1, 2) और (3, 0, 1) में से होकर जाने वाले समतल का प्रतिच्छेद-बिन्दु ज्ञात करो।

4. सिद्ध करो कि बिन्दु A (3i − 4j − 2k) से होकर जाने वाली और सदिश (9i + 6j + 2k) के समान्तर सरल रेखा का समीकरण $\frac{1}{9}(x-3)=\frac{1}{6}(y+4)=\frac{1}{2}(z+2)$ है।

इस रेखा पर दो ऐसे बिन्दु ज्ञात करो जिनकी A से दूरी 22 है।

5. यदि **a**, **b**, **c** तीन सदिश, एक ही समतल के समान्तर न हों तो सिद्ध करो कि बिन्दु $p_i\,\mathbf{a}+q_i\mathbf{b}=r_i\mathbf{c}$ $(i=1, 2, 3, 4)$ समतलीय होंगे यदि

$$\begin{vmatrix} 1 & p_1 & q_1 & r_1 \\ 1 & p_2 & q_2 & r_2 \\ 1 & p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & p_4 & q_4 & r_4 \end{vmatrix}=0.$$

[संकेत चार बिन्दु समतलीय होंगे यदि $\sum_1^4 l_i\,(p_i\mathbf{a}+q_i\mathbf{b}+r_i\mathbf{c})=0$.

और $\sum_1^4 l_i=0$, a, b, c के गुणांकों को शून्य के बराबर करो।]

6. सदिश की विधि से समतल का अन्त: खण्ड-रूपी समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

ज्ञात करो।

7. सिद्ध करो कि यदि कोई समतल दो समान्तर समतलों को काटे तो प्रतिच्छेद-रेखाएं समान्तर होंगी।

8. सिद्ध करो कि समीकरण $|\mathbf{r}-\mathbf{a}|=|\mathbf{r}-\mathbf{b}|$ एक समतल का समीकरण है जो **a** और **b** को मिलाने वाली रेखा को समद्विभाग करती है।

9 सिद्ध करो कि किसी चतुष्फलक की सम्मुख भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ सगामी होती हैं और एक-दूसरे को समद्विभाग करती हैं।

10 सिद्ध करो कि किसी चतुष्फलक के शीर्षों का सम्मुख त्रिभुज के केन्द्रक (centroid) को मिलाने वाली रेखाएँ संगामी होती है।

[आगरा 53]

11 सिद्ध करो कि किसी चतुष्फलक की किसी भुजा तथा उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु मे से जाने वाले समतल एक बिन्दु पर मिलते हैं।

4

दो सदिशों का गुणनफल

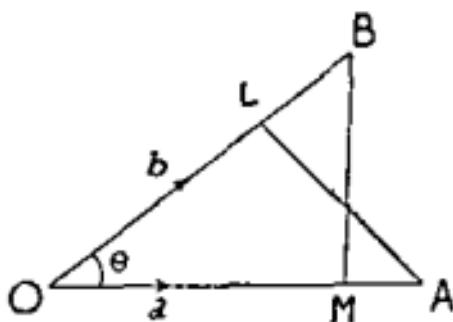
4.1 परिचय

सदिश-बीजगणित मे साधारण बीजगणित के अंकों के गुणनफल के नियमो का प्रयोग (केवल परिमाण का गुणनफल करना) नहीं किया जा सकता क्योंकि सदिश-राशि मे परिमाण के साथ-साथ दिशा भी होती है। अतः ऐसे ही सदिशो के गुणनफल का अनुमान नही लगाया जा सकता। इस लिए सदिशों के गुणनफल की परिभाषा ऐसी होनी चाहिए जोकि भौतिक-विज्ञान में आने वाले अनुप्रयोगो में गुणनफल के समजस हो। हम यहा दो भिन्न प्रकार के सदिश-गुणनफलो की परिभाषा देंगे। इनमे से, एक से तो अदिश-राशि तथा दूसरी से सदिश-राशि प्राप्त होती है। इस प्रकार सदिशों को मिलाने वाली दोनों क्रियाएं "गुणनफल" कहलाती हैं क्योंकि इनमे अंको के साधारण गुणनफल के कुछ गुण विद्यमान हैं। दोनो गुणनफल सदिशो के मापांकों के समानुपाती होते हैं और बंटन-नियम का भी पालन करते हैं। इस-लिए इनको गुणनफल कहना उचित होगा।

यदि किसी बिन्दु पर कोई बल F कार्य कर रहा है और विस्थापन d है, जोकि F की कार्य-दिशा के साथ θ कोण बनाता है, तो बल F द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करने के लिए हम $|F|$ को $|d|$ Cos θ से गुणा करते हैं तो गुणनफल कार्य का मान होगा। परन्तु बल F *का किसी बिन्दु के सापेक्ष घूर्ण* ज्ञात करने के लिए हम $|F|$ को $|d|$ sin θ से गुणा करते है तो *परिणामित* गुणनफल एक सदिश राशि होनी चाहिए क्योंकि घूर्ण की दिशा दक्षिणावर्त या *वामावर्त भी हो सकती है।*

4.2 अदिश-गुणनफल (Scalar or dot product) या बिन्दु-गुणनफल

परिभाषा:—दो सदिशो, **a.b** *का अदिश या बिन्दु-गुणनफल* एक ऐसा अदिश है जिसका परिमाण दोनों सदिशों के मापांको के, और दोनो के बीच के कोण

के कोज्या (Cosine) के गुणनफल के बराबर है । इसको **a.b** से अभिव्यक्त किया जाता है और "**a** डाट **b**" पढ़ा जाता है ।

यदि $|\mathbf{a}|=a$, और $|\mathbf{b}|=b$ और **a** व **b** के बीच का कोण θ हो तो

$\mathbf{a}.\mathbf{b}=ab \text{ Cos } \theta.$. (1)

a और **b**, गुणनफल के गुणन-खण्ड कहलाते हैं । यदि एक भी गुणन-खण्ड शून्य हो तो बिन्दु-गुणनफल भी शून्य होगा ।

$\because$ $\text{Cos}(-\theta)=\text{Cos } \theta$, समीकरण (1) मे θ के स्थान पर यदि $-\theta$ भी लें तो कोई अन्तर नही पड़ता ।

समीकरण (1) से

$\mathbf{a}\,\mathbf{b}=a\,(b \text{ Cos } \theta)=(a \text{ Cos } \theta)\, b=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}.$ ... (2)

b का **a** की दिशा मे घटक b Cos θ है और **a** का **b** की दिशा मे a Cos θ, इसलिए गुणनफल को परिभाषा दूसरी विधि से भी दी जा सकती है ।

अदिश गुणनफल **a b**, दोनों में से एक सदिश के परिमाण तथा इसकी दिशा मे दूसरे सदिश के घटक का गुणनफल है ।

4·3. अदिश गुणनफल के गुण ।

1. अदिश-गुणनफल क्रमविनिमेय (Commutative) नियम का पालन करता है । चूँकि ऊपर (4·2) मे (2) से स्पष्ट है । और $\mathbf{a}\,\mathbf{b}=\mathbf{a}.(-\mathbf{b})=(-\mathbf{a}\,\mathbf{b})=(-\mathbf{a}).(-\mathbf{b}).$

2. यदि m और n अदिश हों और **a**, **b** कोई दो सदिश हों तो $(m\mathbf{a}).(n\mathbf{b})=m\,n\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=mn\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=n\mathbf{a}.m\mathbf{b}.$ .. (1)

अर्थात् m और n को आपस मे अदल-बदल दिया जाय तो भी गुणनफल में कोई परिवर्तन नहीं होता।

3. चूँकि अदिश-गुणनफल संख्या है इसलिए यह किसी सदिश का संख्यात्मिक गुणाक के रूप में भी हो सकता है। जैसे $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\ \mathbf{c}$ एक $\mathbf{c}$ की दिशा मे सदिश है जिसका मापाक $(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c}$ है।

4. किसी सदिश का स्वयम् उससे गुणनफल उसके मापांक का वर्ग होगा क्योंकि

   $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a^2\text{Cos } O=a^2=|\mathbf{a}|^2.$

   इसको $\mathbf{a}^2$ से भी निर्दिष्ट किया जाता है। और यह घन होता है।

5. दो सदिशों का अदिश-गुणनफल धन, शून्य, या ऋण होगा जैसाकि उनके बीच का कोण न्यून, समकोण, या अधिक कोण है। इससे हम लवकोणीयता (Orthogonality) के नियम का निगमन कर सकते हैं। दो लवकोणीय सदिशो का अदिश-गुणनफल शून्य होगा।

विलोमत -यदि दो सदिशों का अदिश-गुणनफल शून्य है तो वे लवकोणीय होगे क्योंकि $\theta=\pi/2$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\text{ Cos }\frac{\pi}{2}=0.$$

विलोमतः $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$ तो $ab\text{ Cos }\theta=0.$

परन्तु $a\neq 0,\ b\neq o,$

$\therefore\ \text{Cos }\theta=0\ or\ \theta=\pi/2$

अतः दो शून्य-रहित सदिशो का अदिश गुणनफल शून्य होगा (if-and only if) यदि और केवल यदि वे लवकोणीय है।

6. दो सदिशो के बीच के कोण का कोज्या, उनके अदिश-गुणनफल को उनके मापाकों के गुणनफल से भाग देने पर, भागफल के बराबर है।

   या $\text{Cos }\theta=\dfrac{\mathbf{a}\ \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}.$

   विशेष रूप से यदि $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ इकाई सदिश हो तो

   $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\text{Cos }\theta$ अर्थात् दो इकाई सदिशो का बिन्दु-गुणनफल उनके बीच के कोण के कोज्या (Cosine) के बराबर होता है।

4 4 लाम्बिक-सदिश त्रयी (Orthogonal-Vector triads) के लिए अदिश-गुणनफल

ऐसे तीन इकाई सदिशो का सेट (Set) जो प्रत्येक दूसरे दोनो पर समकोणीय हो लम्बप्रसामान्यक (Orthonormal) कहलाता है। चूँकि किसी भी सदिश को किन्ही दिए हुए तीन असमतलीय सदिशो में अभिव्यक्त किया जा सकता है। इसलिए किन्ही असमतलीय-सदिश त्रयी (triads) को आधार लिया जा सकता है। विशेष-स्थिति मे यदि तीनो परस्पर लब हों तो लबप्रसामान्यक आधार (Orthonormal base) होगा।

माना $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ तीन परस्पर समकोणीय इकाई सदिश हैं। तो

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1.$ और

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0.$

यह परिणाम निम्न सारणी मे दिए गए हैं।

.	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

4 5 सदिशो का अदिश-गुणनफल योग की क्रिया पर बटन-(distributive) नियम का पालन करता है। अर्थात् यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ तीन सदिश हो तो

$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$

माना $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, सदिश $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ को निरूपित करते हैं। तो

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$$

$$=(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \quad \dots (1)$$

माना BL और CM बिन्दु B और C से OA पर लम्ब हैं

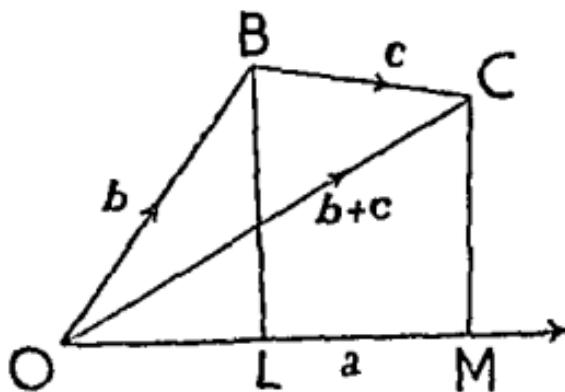
प्रक्षेप $OL=OB \text{ Cos } AOB$

श्रौर प्रक्षेप OM=OC Cos AOC.

LM, BC का OA पर प्रक्षेप है।

अब OM=OL+LM. ....(1)

श्रौर $\mathbf{a}.\ (\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}.\ \overrightarrow{OC}=a.\ OM.$ ....(2)

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a.\ OL$ ....(3)

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=a.\ LM$ ....(4)

(1), (2), (3), (4) से

$\mathbf{a}.\ (\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}.$

अभीष्ट सम्बन्ध है।

यदि c ऋण हो तो

$\mathbf{a}.\ (\mathbf{b}-\mathbf{c})=\mathbf{a}.\ [\mathbf{b}+(-\mathbf{c})]$

$=\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\ (-\mathbf{c})$

$=\mathbf{a}.\mathbf{b}-\mathbf{a}.\mathbf{c}.$

उपप्रमेयः यदि $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{a}.\mathbf{c}$ तो निम्न में से कम से कम एक सत्य है

या $\mathbf{a}=0$, या $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ अन्यथा $\mathbf{a}$, $(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ पर लम्ब है।

उपपत्ति

$\mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{a}.\mathbf{c},$

या $\mathbf{a}.\mathbf{b}-\mathbf{a}.\mathbf{c}=0,$

या $\mathbf{a}.(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0,$

अर्थात्

$\mathbf{a}=0$, या $(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$,

या $\mathbf{a}$, $(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ पर लम्ब है।

4 6 वटन-नियम का व्यापकीकरण। (Generalisation of distributive law.)

ऊपर 4 5 के परिणाम का बार-बार प्रयोग करने से हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\ldots)=\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}\,\mathbf{c}+\mathbf{a}.\mathbf{d}+\ldots\ldots$$

या और भी व्यापक रूप से

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}\quad).(\vec{p}+\vec{q}+\mathbf{r}\;+\ldots)=$$

$$\mathbf{a}.(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}\ldots)+\mathbf{b}.(\vec{p}+\vec{q}+\mathbf{r}+\ldots)+\mathbf{c}.(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}\ldots)+\ldots$$

$$=\mathbf{a}\,\vec{p}+\mathbf{a}\,\vec{q}+\mathbf{a}.\vec{r}\ldots+\mathbf{b}\,\vec{p}+\mathbf{b}\,\vec{q}\ldots+\mathbf{c}.\vec{p}+\mathbf{c}\,\vec{q}\ldots+\ldots$$

विशेष रूप में

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}\,\mathbf{a}+\mathbf{a}\,\mathbf{b}+\mathbf{b}\,\mathbf{a}+\mathbf{b}\,\mathbf{b}$$

$$=\mathbf{a}^2+2\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}^2.\ [\because\ \mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{a}]\quad\ldots(1)$$

इसी प्रकार $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{a}\,\mathbf{b}+\mathbf{b}\,\mathbf{a}-\mathbf{b}^2$

$$=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2\quad\ldots(2)$$

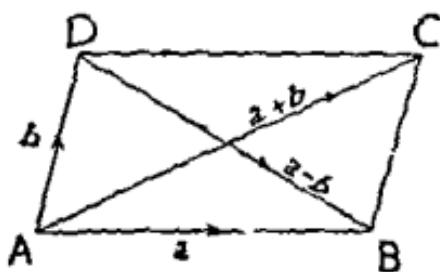
और $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 \quad =\mathbf{a}^2-2\mathbf{a}\,\mathbf{b}+\mathbf{b}^2.\quad\ldots(3)$

ज्यामिति की दृष्टि से यदि परिणाम (1), (2), और (3) को हम देखें तो समान्तर-चतुर्भुज के गुण प्राप्त होते हैं।

ABCD समान्तर चतुर्भुज है जिसकी भुजा $\vec{AB}$ और $\vec{AD}$, सदिश $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ निरूपित करती हैं।

$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$. (4)

$\overrightarrow{DB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$ .. (5)

समीकरण (2) से

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\ (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2.$$

अर्थात् किसी समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं के वर्गों का अन्तर उस आयत के समान होता है जिसकी एक भुजा तो समान्तर चतुर्भुज के एक विकर्ण के बराबर हो और दूसरी भुजा दूसरे विकर्ण का पहले पर प्रक्षेप के बराबर हो।

4.7 अदिश-गुणनफल को घटकों में अभिव्यक्त करना। (Scalar-product in terms of the Components)

माना a और b दो सदिशों को इकाई-सदिश **i**, **j**, **k** में लिखा जाता है। अर्थात्

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, और

$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$,

$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\ (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$

$= a_1b_1\mathbf{i}.\mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i}. + a_1b_3\mathbf{i}.\mathbf{k} + a_2b_1\mathbf{j}\,\mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{j}.\mathbf{j}$

$+ a_2b_3\mathbf{j}\,\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{k}.\mathbf{i} + a_3b_2\mathbf{k}.\mathbf{j} + a_3b_3\mathbf{k}.\mathbf{k}$

[क्योंकि बिन्दु-गुणनफल बटन के नियम का पालन करता है]

परन्तु $\mathbf{i}\,\mathbf{i} = \mathbf{j}\,\mathbf{j} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1$, और

$\mathbf{j}\,\mathbf{k} = \mathbf{k}\,\mathbf{i} = \mathbf{i}\,\mathbf{j} = 0.$

$$\therefore\ \mathbf{a}\,\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_1^3 a_r\, b_r.$$

अत. दो सदिशों का बिन्दु-गुणनफल तदनुरूपी घटकों के गुणनफल के योग के समान होता है।

विशेष स्थिति में $\mathbf{a}\,\mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

पुन: यदि $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ के बीच का कोण θ हो तो

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = ab\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\text{या } \cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{ab}$$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad ....(1)$$

यह सूत्र $\cos\theta$ का सदिश $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ के घटकों में मान ज्ञात करने के लिए है।

पुन: यदि (l_1, m_1, n_1) और (l_2, m_2, n_2), क्रमशः $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ के दिक्कोज्या ($d\,c$) हों तो

$$l_1 = \frac{a_1}{a},\ l_2 = \frac{b_1}{b},$$

$$m_1 = \frac{a_2}{a},\ m_2 = \frac{b_2}{b},$$

$$n_1 = \frac{a_3}{a},\ n_2 = \frac{b_3}{b}.$$

$$\therefore\ \cos\theta = l_1\, l_2 + m_1\, m_2 + n_1\, n_2. \quad ...(2)$$

यदि $\mathbf{r}$ कोई सदिश है और

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad ....(3)$$

तो (3) में दोनों ओर $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ से गुणा करने पर

$$\mathbf{r}.\mathbf{i} = x;\ \mathbf{r}.\mathbf{j} = y,\ \mathbf{r}.\mathbf{k} = z, \quad ....(4)$$

$$\therefore\ \mathbf{r} = (\mathbf{r}.\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{r}.\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{r}.\mathbf{k})\mathbf{k}. \quad ....(5)$$

अतः हम देखते हैं कि सदिश r के, लंबप्रसामान्यक आधार i, j, k (Ortho-normal base) के सापेक्ष निर्देशांक

r.i, r.j, r.k हैं। ... (6)

4.8 स्वेच्छ आधार (Arbitrary Bases)

माना a, b, c तीन असमतलीय सदिश हैं और r एक स्वेच्छ सदिश है। हम x, y, z तीन अदिश राशियां ऐसी ज्ञात कर सकते हैं कि

$$\mathbf{r}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c} \quad \text{.. (1)}$$

दोनों ओर a, b, c का क्रम से गुणा करने पर

$$\mathbf{r.a}=x\mathbf{a.a}+y\mathbf{b.a}+z\mathbf{c.a}. \quad \text{....(2)}$$

$$\mathbf{r.b}=x\mathbf{a.b}+y\mathbf{b.b}+z\mathbf{c.b}. \quad \text{....(3)}$$

$$\mathbf{r.c}=x\mathbf{a.c}+y\mathbf{b.c}+z\mathbf{c.c}. \quad \text{(4)}$$

समीकरण (1), (2), (3), (4) में से x, y, z का निरसन (eliminate) करने पर

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{r.a} & \mathbf{a.a} & \mathbf{b.a} & \mathbf{c.a} \\ \mathbf{r.b} & \mathbf{a\,b} & \mathbf{b.b} & \mathbf{c.b} \\ \mathbf{r.c} & \mathbf{a\,c} & \mathbf{b.c} & \mathbf{c\,c} \end{vmatrix}=0. \quad \text{....(5)}$$

चूंकि योग तथा सदिशों का अदिशों से गुणन के नियम साधारण अंकों के नियमों के अनुरूप हैं इसलिए निरसन उचित है।

माना
$$\Delta=\begin{vmatrix} \mathbf{a\,a} & \mathbf{b\,a} & \mathbf{c.a} \\ \mathbf{a\,b} & \mathbf{b\,b} & \mathbf{c.b} \\ \mathbf{a\,c} & \mathbf{b\,c} & \mathbf{c.c} \end{vmatrix} \quad \text{....(6)}$$

और a, b, c तीन असमतलीय सदिश हैं तो $\Delta \neq 0$।

(5) में सारणिक (determinant) का विस्तार करने पर और Δ भाग देने से

$$\mathbf{r}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \mathbf{r.a} & \mathbf{b.a} & \mathbf{c.a} \\ \mathbf{r.b} & \mathbf{b\,b} & \mathbf{c.b} \\ \mathbf{r.c} & \mathbf{b.c} & \mathbf{c\,c} \end{vmatrix}\mathbf{a}-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \mathbf{r.a} & \mathbf{a.a} & \mathbf{c.a} \\ \mathbf{r.b} & \mathbf{a.b} & \mathbf{c.b} \\ \mathbf{r.c} & \mathbf{a\,c} & \mathbf{c.c} \end{vmatrix}\mathbf{b}$$

$$+\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \mathbf{r.a} & \mathbf{a.a} & \mathbf{b\,a} \\ \mathbf{r\,b} & \mathbf{a\,b} & \mathbf{b.b} \\ \mathbf{r.c} & \mathbf{a.c} & \mathbf{b.c} \end{vmatrix}\mathbf{c}.$$

विशेष-स्थिति में यदि r, a, b समतलीय हैं तो

$$\mathbf{r}=\frac{\begin{vmatrix} \mathbf{r.a} & \mathbf{a.b} \\ \mathbf{r.b} & \mathbf{b.b} \end{vmatrix}\mathbf{a}+\begin{vmatrix} \mathbf{a.a} & \mathbf{r.a} \\ \mathbf{a.b} & \mathbf{r.c} \end{vmatrix}\mathbf{b}}{a^2b^2-(\mathbf{a.b})^2}$$

उदाहरण —1. सिद्ध करो कि सदिश $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ और $\mathbf{c}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। [लखनऊ 52, 56 इलाहाबाद 58]

हम देखते हैं कि

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})+(\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k})$

$=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}-4\mathbf{k}=\mathbf{c}.$

$\therefore$ a, b, c एक त्रिभुज के शीर्ष हैं

अब $\mathbf{a.b}=(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}).(\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k})$

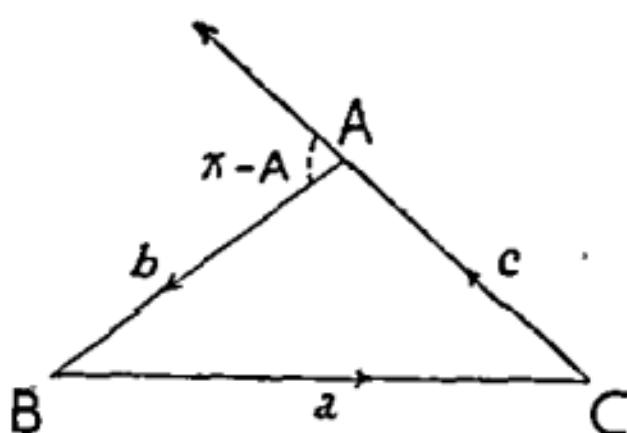
$=2+3-5=0.$

इसलिए a,b एक दूसरे पर लम्ब हैं।

अत त्रिभुज a, b, c समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

2 किसी त्रिभुज ABC में सिद्ध करो कि

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ [लखनऊ 61, कलकत्ता 57, 61]

माना त्रिभुज ABC की भुजाएँ

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ क्रमश: सदिश **a**, **b**, **c** निरूपित करती है। तो

$\mathbf{b}+\mathbf{c}=-\mathbf{a}$, ...(1)

दोनों ओर वर्ग करने पर

$(-\mathbf{a})^2=(\mathbf{b}+\mathbf{c})\ (\mathbf{b}+\mathbf{c})$,

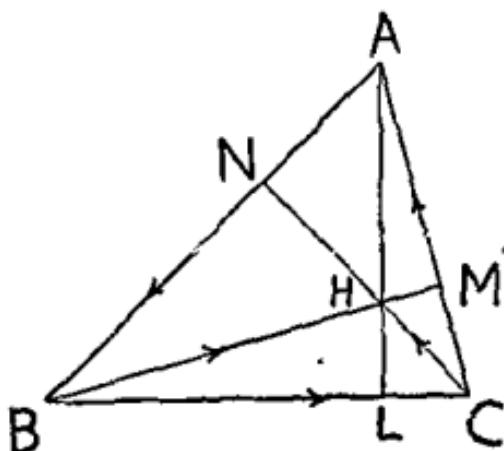
या $\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2\mathbf{b}.\mathbf{c}$

या $a^2=b^2+c^2+2bc\cos(\pi-A)$

$=b^2+c^2-2bc\cos A$ ....(2)

3. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज मे शीर्षों से सम्मुख भुजाओं पर खींचे गए लब समगामी होते है।

[लखनऊ 54, 60, 64, दिल्ली 60, उत्कल 53]

माना A, B, C के स्थिति-सदिश, किसी मूलविन्दु O के सापेक्ष, क्रमश: **a**, **b**, **c** हैं।

माना B और C से खीचे गए सम्मुख भुजाओं पर लम्ब एक दूसरे को H पर काटते हैं। और H का स्थिति-सदिश **h** है।

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{BH}&=\mathbf{h}-\mathbf{b},\\ \overrightarrow{CH}&=\mathbf{h}-\mathbf{c},\\ \overrightarrow{CA}&=\mathbf{a}-\mathbf{c},\\ \overrightarrow{AB}&=\mathbf{b}-\mathbf{a},\end{aligned}\right\} \quad ....(1)$$

$\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BH}=k\,(\mathbf{h}-\mathbf{b})$ ....(2)

इसी प्रकार $\overrightarrow{CN}=l\,\overrightarrow{CH}=l\,(\mathbf{h}-\mathbf{c}).$ ... (3)

जबकि k और l अदिश सख्या है।

$BM \perp CA$

$\therefore\ k\,(\mathbf{h}-\mathbf{b}).\,(\mathbf{a}-\mathbf{c})=0$, या $(\mathbf{h}-\mathbf{b}).\,(\mathbf{a}-\mathbf{c})=0.$ ....(4)

और $CN \perp AB$

$\therefore\ l\,(\mathbf{h}-\mathbf{c}).\,(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$ या $(\mathbf{h}-\mathbf{c}).\,(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0.$ ....(5)

(4) और (5) को जोड़ने से

$\mathbf{h}.\,(\mathbf{b}-\mathbf{c})-\mathbf{a}.\,(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0.$

या $(h-a).\,(b-c)=0.$ ....(6)

अर्थात् $\overrightarrow{AH}.\ \overrightarrow{BC}=0,$

या AH, BC पर लम्ब

अतः तीनों लम्ब H पर मिलते हैं।

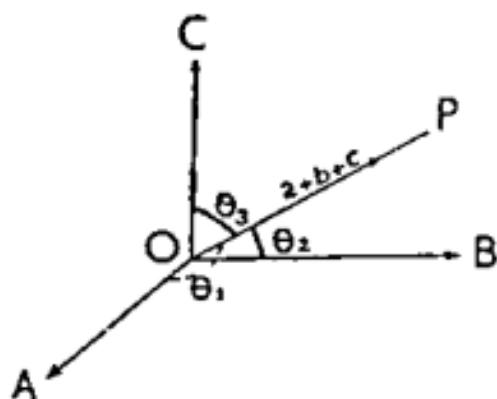
4. यदि सदिश **a**, **b**, **c** एक-दूसरे पर लम्ब हो और उनके मापाक समान हो तो सिद्ध करो कि $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ प्रत्येक के साथ बराबर का कोण बनाता है।

माना मूल-बिन्दु O है और

$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{OB}=\mathbf{b},\ \overrightarrow{OC}=\mathbf{c}.$

तो $|a|=|b|=|c|=a$.

और $\overrightarrow{OP}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

अब

$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).\ (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$

$=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2\mathbf{a}.\mathbf{b}+2\mathbf{b}\ \mathbf{c}+2\mathbf{c}.\mathbf{a}$,

चूँकि a, b, c एक-दूसरे पर लंब हैं।

$\mathbf{a}\ \mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{c}=\mathbf{c}.\mathbf{a}=0$

$\therefore\ (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=3\mathbf{a}^2=3a^2$.

या $OP=|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|=\sqrt{3}a$. ....(1)

माना $\triangle AOP=\theta_1$, $BOP=\theta_2$, $COP=\theta_3$.

$\overrightarrow{OP}.\mathbf{a}=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).\ \mathbf{a}=\mathbf{a}^2=OP.a\cos\theta_1=\sqrt{3}a^2\cos\theta_1$

या $\cos\theta_1\ =\frac{1}{\sqrt{3}}$.

इसी प्रकार $\cos\theta_2=\cos\theta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. किसी चतुष्फलक (tetra hedron) में सम्मुख भुजाओं के दो युग्म ऐसे हो कि वह एक-दूसरे पर लम्ब हों। तो सिद्ध करो कि तीसरे जोड़े की भी सम्मुख भुजाएँ एक-दूसरे पर लम्ब होगी और दो सम्मुख भुजाओं के वर्गों का योग प्रत्येक युग्म के लिए समान है।

[आगरा 53, 62, 66, उत्कल 52, कलकत्ता 50, विक्रम 63, दिल्ली 53]

OABC एक चतुष्फलक है। माना O के सापेक्ष A, B, C के स्थिति-सदिश a, b, c है। तब

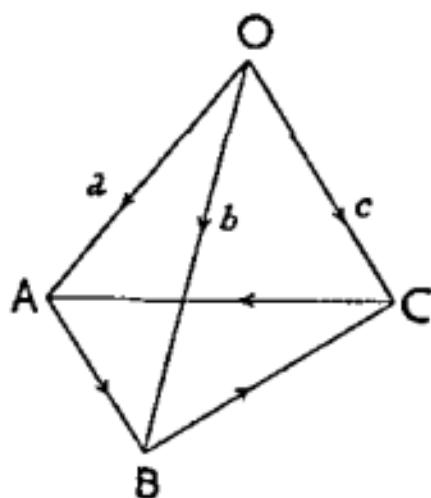
$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$,

$\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$,

$\overrightarrow{CA}=\mathbf{a}-\mathbf{c}$,

$\because\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OC}$,

$\therefore$ c. (b − a) = 0. ... (1)

और $\vec{OB} \perp \vec{CA}$

$\therefore$ b. (a − c) = 0. ... (2)

(1) और (2) से जोड़ने पर

b.a − c.a = 0.

या a. (b − c) = 0. ....(3)

(3) से स्पष्ट है कि $\vec{BC} \perp \vec{OA}$.

अब $(OB)^2 + (CA)^2 = b^2 + (a - c)^2$

$= b^2 + c^2 + a^2 - 2a.c$ ....(4)

$OA^2 + BC^2 = a^2 + c^2 + b^2 - 2.b.c$ ....(5)

और $OC^2 + AB^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a\,b.$ ....(6)

(1), (2) और (3) से

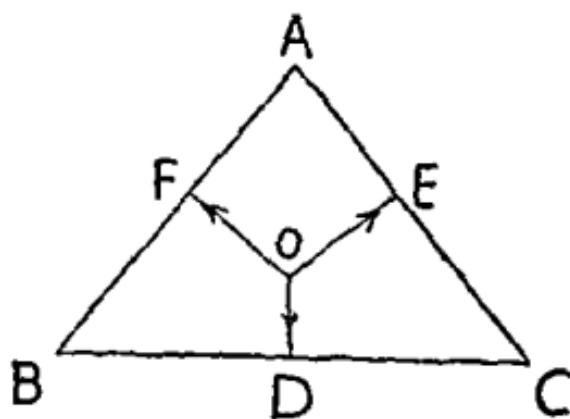
a.b = b c = c.a

$\therefore$ (4) = (5) = (6)

यही सिद्ध करना था ।

6. सिद्ध करो कि प्रत्येक त्रिभुज में भुजाओं के लम्ब-समद्विभाजक सगामी होते हैं । [लखनऊ 63]

D, E, F क्रमश: भुजाओं BC, CA, AB के मध्य बिन्दु हैं। और माना D, E पर लम्ब, O पर एक-दूसरे को काटते हैं।

माना a, b, c और $\vec{m}$ क्रमश: A, B, C और O के स्थिति-सदिश हैं।

$$\vec{OD} = \frac{b+c}{2} - \vec{m}. \qquad ....(1)$$

परन्तु OD ⊥ BC

$$\therefore \left(\frac{b+c}{2} - \vec{m}\right).\ (c-b) = 0. \qquad ....(2)$$

इसी प्रकार OE ⊥ CA

$$\therefore \left(\frac{c+a}{2} - \vec{m}\right).\ (a-c) = 0. \qquad ....(3)$$

(2) और (3) को जोड़ने से

$$\left(\frac{a+b}{2} - \vec{m}\right).\ (a-b) = 0. \qquad ....(4)$$

अर्थात् OF, AB पर लम्ब है

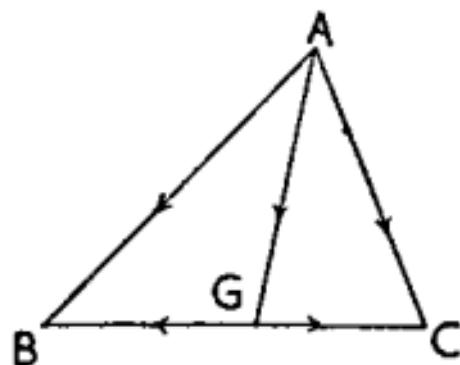
7. त्रिभुज ABC के आधार BC पर एक बिन्दु G ऐसा लिया गया है कि m BG$=n$GC, तो सिद्ध करो कि

$m\ AB^2 + nAC^2 = mBG^2 + nCG^2 + (m+n)\ AG^2$

माना A, B, C के स्थिति-सदिश क्रमशः **a**, **b**, **c** हैं।

$\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b},$

$\overrightarrow{BG} = \frac{n}{m+n}\ \overrightarrow{BC},$

$\overrightarrow{GC} = \frac{m}{m+n}\ \overrightarrow{BC},$

$$\text{विन्दु G का स्थिति-सदिश} = \frac{m\mathbf{b} + n\mathbf{c}}{m+n} \quad ....(1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} \quad ...(2)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} \quad ....(3)$$

(2) और (3) से

$$m(\overrightarrow{AB})^2 + n\ (\overrightarrow{AC})^2 = m\ (\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GB}^2\ + 2.\overrightarrow{AG}\ \overrightarrow{GB})\ + n\ (\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC})$$

$$= (m+n)\ \overrightarrow{AG}^2 + m\ \overrightarrow{GB}^2 + n\ \overrightarrow{GC}^2 + 2\ \overrightarrow{AG}\ (m\overrightarrow{GB} + n\ \overrightarrow{GC})$$

$$= (m+n)\ AG^2 + mGB^2 + nGC^2 + 2AG\ (0) \quad ....(4)$$

क्योंकि $m\ \overrightarrow{GB} + n\ \overrightarrow{GC} = -\ m\overrightarrow{BG} + n\overrightarrow{GC} = 0.$

विशेष स्थिति मे यदि G, BC का मध्य विन्दु है तो $m = n$

अत.

$$AB^2 + AC^2 = 2AG^2 + 2GB^2. \quad ...(5)$$

प्रश्नावली न० 6

1. सिद्ध करो कि एक समबाहु चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर काटते है। [लखनऊ 50, आगरा 57]

2. सिद्ध करो कि वह समान्तर चतुर्भुज जिसके विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर काटते है, आयत है। [लखनऊ 63]

3. सिद्ध करो कि किसी समद्विबाहु त्रिभुज मे आधार की माध्यिका उस पर लम्ब होती है।

4. सिद्ध करो कि किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण (hypotenuse) के मध्य बिन्दु की उसके शीर्षो से दूरी समान होती है। [पजाब 60)]

5. *निम्न सदिशो के बीच के कोण का ज्या (sine) और कोज्या (cosine) ज्ञात करो।*

   (i) $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$,
   $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

   [लखनऊ 50, 60, इलाहाबाद 59]

   (ii) $\mathbf{a}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$,
   $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$,

   [इलाहाबाद 59, लखनऊ 60]

6. दिया हुआ है कि सदिश

   $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, और $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$.

   (i) **a** और **b** समान्तर होगे यदि और केवल यदि (If and only if)
   $a_1 : a_2 : a_3=b_1 : b_2 : b_3$.

   (ii) **a** और **b** लम्ब होगे (iff) यदि और केवल यदि
   $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

7. यदि **a** और **b** इकाई सदिश हो और उनके बीच का कोण θ हो तो, सिद्ध करो कि

   $\sin\dfrac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\,|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$. [राजस्थान 70]

[संकेत $(a-b)^2 = 2 - 2\cos\theta$]

8. यदि सदिश **a** और **b** के परिणाम a और b हों तो सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{a^2} - \frac{\mathbf{b}}{b^2}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{ab}\right)^2.$$

9 सदिश की विधि से सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज ABC मे

$a = b\cos C + c\cos B.$ [लखनऊ 61]

10 सदिश की विधि से सिद्ध करो कि

$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$

[संकेत समीकरण 4.7 (1) से $\cos\theta \leqslant 1$.]

11 सिद्ध करो कि एक सम-चतुष्फलक की सम्मुख भुजाएँ परस्पर लंब होती हैं। [आगरा 65]

12 सदिश की विधि से सिद्ध करो कि एक सम-चतुष्फलक के किसी दो समतलो के बीच का कोण $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ होता है। [दिल्ली 62]

13. किसी बाह्य विन्दु O से ON के एक समतल पर लम्ब डाला गया है और उसमे स्थित एक रेखा PQ पर OM लम्ब है। सिद्ध करो कि MN, PQ पर लम्ब है। [पटना 59]

14 यदि **a**, **b**, **c** समतलीय हैं और **a**, **b** के समान्तर नही है तो सिद्ध करो कि

$$\mathbf{c} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{c}.\mathbf{a} & \mathbf{a}.\mathbf{b} \\ \mathbf{c}.\mathbf{b} & \mathbf{b}.\mathbf{b} \end{vmatrix}\mathbf{a} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}.\mathbf{a} & \mathbf{c}.\mathbf{a} \\ \mathbf{a}.\mathbf{b} & \mathbf{c}.\mathbf{b} \end{vmatrix}\mathbf{b}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}.\mathbf{a} & \mathbf{a}.\mathbf{b} \\ \mathbf{a}.\mathbf{b} & \mathbf{b}.\mathbf{b} \end{vmatrix}}$$ [पटना 58]

[संकेत $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = 0$, **a**,**b** मे गुणा करके x, y, z का निरसन करो।]

15 सिद्ध करो कि यदि $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ तो **a**,**b** एक-दूसरे पर लंब हैं।

16 OABC एक चतुष्फलक मे OA, BC पर लम्ब है तो सिद्ध करो कि $OB^2 + CA^2 = OC^2 + AB^2$.

17. एक घन के दो विकर्णों के बीच का कोण ज्ञात करो।

18. A, B, C, D कोई चार बिन्दु हैं, तो सिद्ध करो कि

$$\vec{AB}.\vec{CD}+\vec{BC}.\vec{AD}+\vec{CA}.\vec{BD}=0.$$

19. ABCD एक समलम्ब है जिसकी भुजा BC और AD समान्तर हैं तो सिद्ध करो कि

$$AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+2\ \vec{BC}, \vec{AD}.$$

20 वह इकाई सदिश ज्ञात करो जो दोनों सदिशों (2, 1, 1) और (3, 2, −1) पर लम्ब हो। इन सदिशों के बीच का कोण भी ज्ञात करो।

[संकेत माना इकाई सदिश (x, y, z) है। यह दोनों पर लम्ब है और $x^2+y^2+z^2=1.$]

21. यदि एक सीधी-रेखा किन्हीं तीन समतलीय रेखाओं पर लम्ब है तो वह उस समतल पर भी लम्ब होगी।

22 यदि इकाई-सदिश $\hat{b}$ के समान्तर एक सरल रेखा का समीकरण

$r=a+n\ \hat{b}$ हो, तो सिद्ध करो कि मूलबिंदु से होकर जाने वाली और इस पर लम्ब रेखा का समीकरण

$r=m\ [a-(a.\hat{b})\ \hat{b}]$. और मूलबिंदु से दी हुई रेखा पर लम्ब की लम्बाई

$\sqrt{a^2-(a.\hat{b})^2}$ है। [*लखनऊ 49, 52, 58, इलाहाबाद 59*]

23. यदि a, b, c असमतलीय-सदिश हों और
p.a=p.b=p c=0. तो, p एक शून्य-सदिश होगा।

24. m_1, m_2, m_3..... संहति के कुछ कण बिन्दु A, B, C पर रखे गए हैं और G इनका संहति-केन्द्र है। यदि P कोई बिन्दु हो तो सिद्ध करो कि

$$m_1\, AP^2 + m_2\, BP^2 + m_3\, CP^2 + \ldots$$
$$= m_1\, AG^2 + m_2\, BG^2 + m_3\, CG^2 + \ldots\ldots +$$
$$(m_1 + m_2 + m_3 \ldots)\, PG^2.$$

[संकेत G को मूल-बिन्दु लो।]

4.9 सदिश-गुणनफल या वज्रीय गुणनफल। *(Vector Product or cross-Product.)*

4.91 परिचय।

हमें प्राय ऐसी सदिश-राशियां भी मिलती हैं जो दूसरे दो सदिशो पर इस प्रकार आश्रित होती हैं कि वे इन दोनो के परिमाण के और दोनो के बीच के कोण के (sine) ज्या के समानुपाती होती हैं; और उनकी दिशा इन दोनो पर लम्ब होती है। अत हम निम्नांकित परिभाषा प्राप्त करते हैं।

4 92 परिभाषा :—दो सदिश **a** और **b** का सदिश या वज्रीय-गुणनफल एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|.\sin\theta$ है (θ सदिश **a** और **b** के बीच का कोण है) और वह **a** और **b** दोनो पर लम्ब होता है और **a** से **b** की ओर घूर्णन के सापेक्ष इसकी दिशा धन होती है इसको $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ लिखा जाता है। **a** cross (वज्र) ***b***.

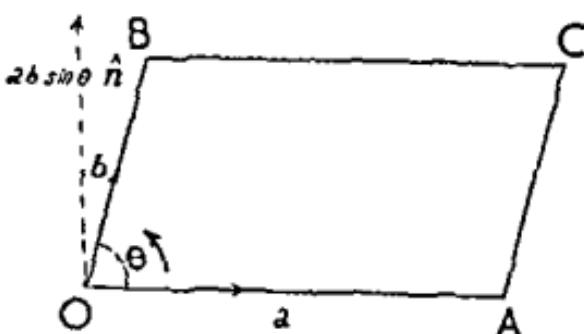
अत. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = ab\sin\theta\,\hat{n}.$

जहां $\hat{n}$ इकाई-सदिश है जोकि **a** और **b** के समतल पर लम्ब होता है। और **a** से **b** की ओर घूर्णन से दक्षिणावर्ती पेच के बढ़ने की दिशा मे धन होता है।

4 10 सदिश-गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या (सदिश-क्षेत्रफल) (Geometrical interpretation of the vector—product. (Vector area)

माना OACB एक समान्तर-चतुर्भुज है जिसकी आसन्न भुजाएं $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ क्रमशः सदिश **a** और **b** निरूपित करती हैं। और

उनके बीच का कोण θ है। अब समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$=ab \sin \theta. \quad ....(1)$$

a और **b** के समतल के लम्बतः इकाई सदिश $\hat{n}$ है। **a**, **b** और $\hat{n}$ एक दक्षिणावर्ती पेच बनाते हैं।

सदिश-क्षेत्रफल OACB is

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \theta\ \hat{n}. \quad ....(2)$$

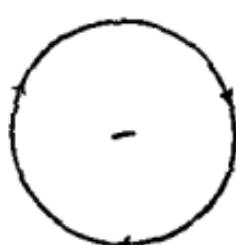
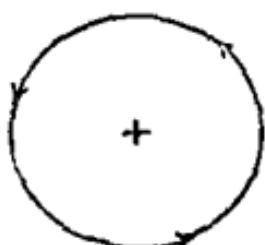
क्षेत्रफल OACB की सीमा इस क्रम से खींची गई है कि

O→ A→ C→ B→ O.

कोई भी समतल-क्षेत्र एक सदिश **c** द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जिसकी परिभाषा निम्न रूप से है।

i **c** की लम्बाई की इकाई की सख्या=दिए हुए क्षेत्रफल की इकाई की संख्या

ii सदिश की दिशा क्षेत्रफल के तल पर लम्ब होती है।

iii **c** की अभिदिशा (sense) ऐसी होती है कि क्षेत्रफल का सीमा वक्र

खीचने की दिशा और c की अभिदिशा दोनों दक्षिणावर्ती पेच के अनुरूप होते हैं ।

टिप्पणी:—सदिश-गुणनफल और अदिश-गुणनफल मे भेद दिखाने के लिए सदिश-गुणनफल मे दो सदिशों के बीच × लिखा जाता है और अदिश-गुणनफल मे . (बिन्दु) लिखा जाता है । सदिश-गुणनफल को इसलिए (cross-product) वज्रीय गुणनफल कहते हैं । यह बाह्य गुणनफल (outer-product) भी कहलाता है । कई लेखक इसे [ab] या a△b से भी सूचित करते हैं ।

4.11 *एक महत्वपूर्ण सम्बन्ध । (an important relation)*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2\,\mathbf{b}^2+(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2.$$

उपपत्ति: हमे प्राप्त है कि

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=[|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta]^2.$$

$$=a^2b^2\sin^2\theta\;\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}=a^2b^2\sin^2\theta.$$

$$=a^2b^2\,(1-\cos^2\theta)=a^2b^2-(ab\cos\theta)^2$$

$$=\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2=\begin{vmatrix}\mathbf{a}.\mathbf{a} & \mathbf{a}\,\mathbf{b}\\ \mathbf{a}.\mathbf{b} & \mathbf{b}.\mathbf{b}\end{vmatrix}\quad ....(1)$$

(1) से सदिश $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ का परिमाण बिन्दु-गुणनफलों मे प्राप्त होता है ।

अर्थात् a a, b.b, और a b में ।

4.12 सदिश-गुणनफल के गुण (Properties of cross-product)

दो समान्तर सदिशो का वज्रीय-गुणनफल शून्य-सदिश होता है । क्योकि दो समान्तर सदिशो के बीच का कोण 0° या π होता है और चूंकि $\sin 0°=\sin\pi=0$

$\therefore\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}=ab\sin 0=0.$ ....(1)

विशेष स्थिति मे $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0.$ .. (2)

2. *सदिश-गुणनफल क्रमविनिमेय (Commutative) नियम का पालन नहीं करता ।*

4.10 से स्पष्ट है कि सदिश $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ और $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ दोनो का परिमाण तो समान है परन्तु उनकी दिशाएँ एक-दूसरे के विपरीत हैं। अत:

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}.$

इसलिए सदिश-गुणनफल क्रमविनिमेय नियम का पालन नही करता यदि गुणन मे क्रम बदल दिया जाय तो गुणनफल का चिह्न भी बदल जाता है।

3. यदि m और n दो अदिश हो और $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ दो सदिश हो तो

$(m\,\mathbf{a})\times(n\,\mathbf{b})=mn\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=n\,\mathbf{a}\times m\mathbf{b}.$

उपपत्ति. $(m\,\mathbf{a})\times(n\,\mathbf{b})=(ma)\,(nb)\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}$

$=mn\,(ab\sin\theta\,\hat{n}).$

$=mn\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$ [$\because$ $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$, $m\mathbf{a}$ और $n\mathbf{b}$ के समान्तर हैं

$\therefore$ θ और $\hat{n}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ के लिए भी वही हैं]

यदि m और n को अदल-बदल कर दे तो भी परिणाम मे कोई अन्तर नहीं पड़ता।

4. दो सदिशों के बीच के कोण का ज्या (sine) उनके सदिश-गुणनफल के मापांक को, उनके मापांको के गुणनफल से भाग देने पर, भागफल के बराबर होता है। अर्थात्

$$\sin\theta=\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

5. बंटन-नियम (distributive law)

प्रमेय: सदिशों का सदिश-गुणनफल सदिश-योग पर बंटन-नियम का पालन करता है। अर्थात्

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}.$

[आगरा 67, राज० 68]

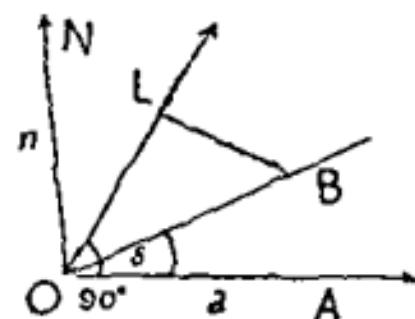
पहली विधि:--

$\vec{OA}$ और $\vec{OB}$ दो सदिश क्रमश.

a और b हैं।

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \hat{n}$ ....(1)

जोकि समतल AOB पर

लम्ब ON की दिशा मे है।

बिन्दु O मे से गुजरने वाला एक समतल ऐसा खीचो जो OA के लम्ब हो। माना इस समतल पर $\vec{OB}$ का प्रक्षेप $\vec{OL}$ है।

स्पष्ट है कि $|\vec{OL}| = b \sin \theta.$ ....(2)

और $\vec{OL}, \vec{OA}, \vec{OB}$ समतलीय हैं।

अब $\mathbf{a} \times \vec{OL} = ab \sin \theta \, \hat{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ [(1) से] ....(3)

हम अब $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ का अर्थ इस प्रकार भी ले सकते हैं कि यह ऐसा सदिश है जो सदिश $\vec{OL}$ को $\vec{OA}$-अक्ष के सापेक्ष 90° से घुमा कर (धन दिशा में) इसको a से गुणा करने से प्राप्त होता है।

अब सदिशो $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, $\mathbf{b}$, और $\mathbf{c}$ पर विचार करें।

किसी भी समतल पर $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ का लम्बकोणीय प्रक्षेप, उस तल पर b और c के प्रक्षेपो के योग के बराबर होता है।

इस परिणाम से हम OA पर लंबत: समतल पर इनके प्रक्षेपो का विचार करते हैं। $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ का प्रक्षेप, b और c के प्रक्षेपो के योग के समान होगा। और यदि 90° से अक्ष OA के प्रति घुमा दिया जाय तो भी समानता बनी रहेगी।

अत $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ द्वारा प्राप्त सदिश $=$ b और c द्वारा प्राप्त सदिशो के योग के।

इनको दोनो ओर a से गुणा करने पर भी समानता बनी रहेगी।

अत. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$

दूसरी विधिः—

माना सदिश $\vec{p} = a \times (b+c) - a \times b - a \times c.$ ....(1)

किसी सदिश $\vec{r}$ से दोनों ओर अदिश-गुणा करने पर

$\vec{r} \cdot \vec{p} = \vec{r} \cdot [a \times (b+c) - a \times b - a \times c].$

$= \vec{r} \cdot a \times (b+c) - \vec{r} \cdot a \times b - \vec{r} \; a \times c.$

(∵ अदिश-गुणनफल बटन के नियम का पालन करता है)

अब बिंदु (∘) और (×) वज्र को यदि आपस में बदल दे तो व्यंजक मे कोई अन्तर नही होगा [देखो अध्याय 5 त्रिक-गुणनफल]

अत· $\vec{r} \cdot \vec{p} = (\vec{r} \times a) \; (b+c) - (\vec{r} \times a) . b - (\vec{r} \times a) . c$

∵ अदिश-गुणनफल बटन के नियम का पालन करता है

$\therefore \vec{r} \cdot \vec{p} = (r \times a) . b + (\vec{r} \times a) \; c - (\vec{r} \times a) \; b - (r \times a) c.$

या $\vec{r} \cdot \vec{p} = 0.$ ....(2)

चूँकि $\vec{r}$ एक स्वेच्छ सदिश है इसलिए $\vec{p} = 0.$ ... (3)

अत: $a \times (b+c) - a \times b - a \times c = 0.$

या $a \times (b+c) = a \times b + a - c.$ ....(4)

उप-प्रमेय 1. पुन: $(b+c) \times a = -a \times (b+c),$

$\therefore \; (b+c) \times a = -a \times b + (-a) \; c$

$= b \times a + c \times a.$ ... (5)

उप-प्रमेय 2 $\quad a \times (b-c) = a \times [b + (-c)] \cdot$

$= a \times b + a \times (-c).$

$= a \times b - a \times c.$ .. (6)

ऊपर का नियम किन्ही संख्याओं के लिए सत्य है। अत:

$(a+b+c....) \times (p+q+r \quad)$

$= a \times p + a \times q + a \times r + ... + b \times p$
$+ b \times q + b \times r + ... + c \times p + c \times q + c \times r + ... + ...$

नोट: 1 यदि $a \times b = a \times c$ तो $a \times (b - c) = 0$.

अर्थात् या तो $a = 0$, या $b = c$ अन्यथा a और $(b - c)$ समान्तर हैं।

नोट 2. यह सावधानी रहे कि सदिश-गुणनफल में गुणन-खण्डो के क्रम को न बदला जाए।

4 13 लवप्रसामान्यक त्रयी। (orthonormal triads)

यदि i, j, k तीन परस्पर समकोणीय-इकाई सदिश हो जोकि दक्षिणावर्ती पद्धति बनाते है तो

$i \times i = j \times j = k \times k = 0.$

और $i \times j = k$, $j \times k = i$, और $k \times i = j$.

इनको निम्न सारणी के रूप मे भी अभिव्यक्त किया जा सकता है

x	i	j	k
i	0	k	-j
j	k	0	i
k	j	-i	0

4 14 सदिश-गुणनफल को घटकों में अभिव्यक्त करना। (vector product in terms of components)

माना a और b दो ऐसे सदिश हैं कि

$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

$a \times b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k).$

$= (a_1 b_2 k - a_1 b_3 j - a_2 b_1 k + a_2 b_3 i + a_3 b_1 j - a_3 b_2 i)$ -

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) j$

परिणाम (1) को सारणिक के रूप मे भी दिखा सकते हैं। ....(1)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad \text{....(2)}$$

समीकरण (1) से हमे प्राप्त है

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=ab \sin\theta\ \hat{n}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k} \quad \text{....(3)}$$

दोनों ग्रोर वर्ग करने पर ग्रौर बिन्दु-गुणनफल का उपयोग करने से प्राप्त है

$$a^2b^2 \sin^2\theta=(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 \text{....(4)}$$

$$\text{या } \sin^2\theta = \frac{\Sigma\,(a_2b_3-a_3b_2)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\ (b_1^2+b_2^2+b_3^2)} \text{....(5)}$$

सूत्र (1) से, दो सदिशों के बीच का कोण उनके घटकों में ज्ञात कर सकते है।

उप-प्रमेयः यदि सदिश a ग्रौर b किन्हीं तीन सदिशो के एक-घाततः संचय में दिए हुए हों, ग्रर्थात्

$\mathbf{a}=a_1\mathbf{l}+a_2\mathbf{m}+a_3\mathbf{n}$. ग्रौर

$\mathbf{b}=b_1\mathbf{l}+b_2\mathbf{m}+b_3\mathbf{n}$. तो

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{m}\times\mathbf{n} & \mathbf{n}\times\mathbf{l} & \mathbf{l}\times\mathbf{m} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

उप-प्रमेय.1. यदि $\mathbf{b}=\mathbf{c}+n\mathbf{a}$ जबकि n एक ग्रदिश राशि है।

तो $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}$. ($\because\ \mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$)

इसके विलोमतः यदि $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ ग्रौर a शून्य-सदिश न हो तो इससे यह ग्रनुमान नही लगाया जा सकता कि $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ परन्तु b ग्रौर c में एक a के समान्तर सदिश का ग्रन्तर होगा जोकि शून्य न हो।

उप-प्रमेय 2. यदि a, b, c तीन ग्रसमतलीय सदिश हो, ग्रौर यदि c दोनों, a ग्रौर b पर लम्ब हो तो c, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ के समान्तर होगा।

उदाहरण नं० 1.

वह प्रतिबन्ध ज्ञात करो कि सदिश $\mathbf{a}=(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})$ और $\mathbf{b}=(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})$ समान्तर हों।

$\mathbf{a}$ और b समान्तर होंगे यदि $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$.

या $(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})=0.$

या $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$

या $(a_2b_3-a_3b_2)\,\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\,\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\,\mathbf{k}=0.$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ प्रत्येक के गुणाकों को शून्य रखने पर

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},\quad \frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1},\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}.$$

या $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

2. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी आसन्न भुजाएँ $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ और $(-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$ हैं।

[इला० 57, लख० 57,60]

माना $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=(-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$, तो

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=8\mathbf{i}-10\mathbf{j}+4\mathbf{k}. \qquad \ldots (1)$$

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

$=\sqrt{64+100+16}=\sqrt{180}$ इकाई.

3. वह इकाई-सदिश ज्ञात करो जो सदिशों $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ और $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$ पर लम्ब हो। इन दोनों सदिशो के बीच के कोण का sine ज्ञात करो

[लख० 60, 62 उत्कल 63, वि० 63.]

माना दो सदिश, $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$ हैं।

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ इन दोनो सदिशो पर लम्ब होगा।

और $ab \sin\theta\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{n}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=-3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+11\mathbf{k}$ ....(1)

सदिश $\vec{\mathbf{n}}$ की लम्बाई $=\sqrt{9+25+121}=\sqrt{155}$. ....(2)

$\therefore$ इकाई सदिश $\hat{n} = -\dfrac{3}{\sqrt{155}}\mathbf{i}+\dfrac{5}{\sqrt{155}}\mathbf{j}+\dfrac{11}{\sqrt{155}}\mathbf{k}$. ....(3)

माना दोनो सदिशो के बीच का कोण θ है तो

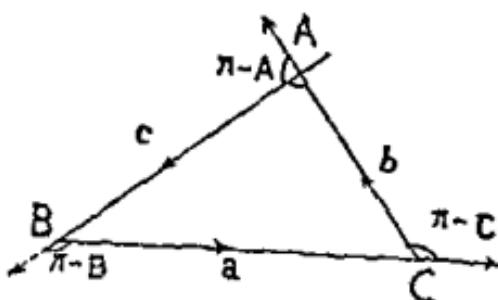
$$\sin^2\theta=\frac{\Sigma(a_2b_3-a_3b_2)^2}{\Sigma a_1^2.\ \Sigma b_1^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3^2+5^2+11^2}}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{9+16+1}}=\frac{\sqrt{155}}{\sqrt{156}}.$$ उत्तर

4· सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज ABC मे

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$ [गुजरात 52, बम्बई 60]

त्रिभुज ABC मे माना $\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AB}$ क्रमशः सदिश $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ निरूपित करते हैं।

सदिश-योग के नियम से

$-\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}.$ ....(1)

या $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0.$ ....(1)

(1) से a और b का क्रमिक सदिश-गुणन करने से

$\mathbf{a}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=0.$

या $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}.$ ... (2)

और $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=\mathbf{c}\times\mathbf{b}.$ ....(3)

(2) और (3) से $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}.$ ....(4)

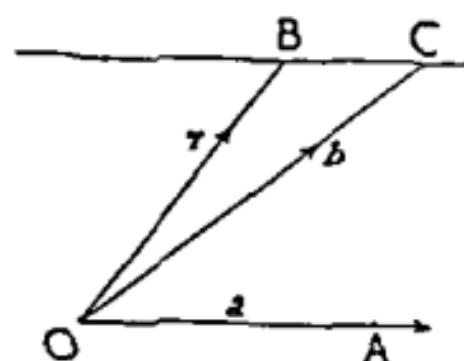
या $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|=|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|.$ ....(5)

$ab\sin(\pi-C)=bc\sin(\pi-B)=ca\sin(\pi-A).$

या $ab\sin C=bc\sin B=ca\sin A.$

या $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$ .. (6)

5. एक अचर सदिश $\overrightarrow{OA}$ का, नियत समतल AOB मे एक चर सदिश $\overrightarrow{OB}$, से गुणनफल एक अचर-सदिश है। सिद्ध करो कि B का बिन्दु-पथ एक सरल-रेखा है जोकि $\overrightarrow{OA}$ के समान्तर है। [लखनऊ 55, पूरक 59]

माना $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, और चर सदिश $\overrightarrow{OB}=\mathbf{r}$, और $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ एक नियत सदिश है जो $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ के सदिश-गुणनफल के बराबर है। अर्थात्

$\mathbf{a}\times\mathbf{r}=\mathbf{c}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ ... (1) [माना]

क्योंकि कोई भी अचर-सदिश दो नियत सदिशों के वज्रीय-गुणनफल से अभिव्यक्त किया जा सकता है।

या $\mathbf{a}\times\mathbf{r}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

या $\mathbf{a}\times(\mathbf{r}-\mathbf{b})=0$. ....(2)

(2) से स्पष्ट है कि सदिश $(\mathbf{r}-\mathbf{b})$, सदिश $\mathbf{a}$ के समान्तर है।

या $\mathbf{r}-\mathbf{b}=t\mathbf{a}$.

या $\mathbf{r}=\mathbf{b}+t\mathbf{a}$. ... (3)

समीकरण (3) एक सरल-रेखा है जोकि सदिश $\mathbf{a}$ के समान्तर है और बिन्दु $\mathbf{b}$ मे से होकर जाती है। अत. चर सदिश $\mathbf{r}$ का अन्तिम सिरा इस सरल-रेखा पर है, या B का बिन्दु-पथ एक सीधी रेखा है।

6. सिद्ध करो कि $\mathbf{d}$ बिन्दु से होकर जाने वाली और $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ सदिशो के साथ समान कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण

$\mathbf{r}=\mathbf{d}+t\{a\ \mathbf{b}\times\mathbf{c}+b\ \mathbf{c}\times\mathbf{a}+c\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$ है। [लखनऊ 61]

माना वह रेखा इकाई सदिश $\hat{\mathbf{k}}$ के समान्तर है। तो इसका समीकरण

$\mathbf{r}=\mathbf{d}+s\hat{\mathbf{k}}$ है। ....(1)

माना वह $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ के साथ θ कोण बनाती है। और $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}$ क्रमश: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ की दिशा मे इकाई सदिश हैं। तो

$$\hat{\mathbf{a}}.\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{b}}.\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{c}}.\hat{\mathbf{k}}=\text{Cos }\theta. \quad ....(2)$$

या $\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{a}}-\hat{\mathbf{b}})=0$. ....(3)

और $\hat{\mathbf{k}}.(\hat{\mathbf{b}}-\hat{\mathbf{c}})=0$. ....(4)

(3) और (4) से स्पष्ट है कि सदिश $\hat{\mathbf{k}}$, $(\hat{\mathbf{a}}-\hat{\mathbf{b}})$ और

$(\hat{b}-\hat{c})$ पर लम्ब है । इसलिए $\hat{k}$, $(\hat{a}-\hat{b}) \times (\hat{b}-\hat{c})$ के समान्तर है ।

अत: सरल-रेखा का समीकरण है

$$r = d + s' \{ (\hat{a}-\hat{b}) \times (\hat{b}-\hat{c}) \}.$$

$$= d + s' \{ \hat{a} \times \hat{b} + \hat{c} \times \hat{a} + \hat{b} \times \hat{c} \}.$$

$$= d + abc\, s' \,(ca \times b + bc \times a + ab \times c).$$

$$= d + t\,(ca \times b + bc \times a + a\,b \times c). \qquad \dots(5)$$

प्रश्नावली 7

1 सिद्ध करो कि $(a-b)\times(a+b) = 2a\times b$. इसकी ज्यामितीय व्याख्या करो ।

[लखनऊ 56, 59, आगरा 66, 67]

2. सिद्ध करो कि

$a \times (b+c) + b \times (c+a) + c \times (a+b) = 0.$

3. यदि a, b, c किसी त्रिभुज के शीर्ष हैं, तो सिद्ध करो कि त्रिभुज का सदिश-क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\,(b \times c + c \times a + a \times b)$.

[उत्कल 50, विक्रम 63]

इससे तीन बिन्दुओं के समरेख होने का प्रतिबन्ध ज्ञात करो ।

4. यदि बिन्दु A, B, C के किसी मूलबिन्दु के सापेक्ष स्थिति-सदिश a, b, c हो तो सिद्ध करो कि सदिश $(a \times b + b \times c + c \times a)$ समतल ABC पर लम्ब होगा ।

5. उस समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी दो आसन्न भुजाएँ $i+2j+3k$ और $-3i-2j+k$ हैं ।

[लखनऊ 57, इला० 57]

6. उस समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके विकर्ण $3i+j-2k$ और $\triangle i-3j+4k$ हैं।

7. दो सदिश a और b के बीच के कोण का ज्या (sine) ज्ञात करो, $a=3i+j+2k$, $b=2i+2j+4k$.

[लखनऊ 60]

8. दो सदिशों $a=3i+4j$ and $b=-5i+7j$ द्वारा घेरे गए क्षेत्रफल का मान ज्ञात करो।

9. सिद्ध करो कि एक समतल चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}.$$

[संकेत उन दो त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिनमे विकर्ण $\overrightarrow{AC}$ चतुर्भुज को विभाजित करता है]

10. सिद्ध करो कि किसी समलब की एक असमानान्तर भुजा के मध्य-बिन्दु के सम्मुख भुजा के सिरो को मिलाने से जो त्रिभुज बनता है उसका क्षत्रफल समलब के क्षेत्रफल का आधा होता है।

[आगरा 57]

11. सिद्ध करो कि दो सदिशों b और c पर लम्ब-सदिश का समीकरण $r=a+t\,(b\times c)$ है।

[लखनऊ 56, 57, 59]

12. यदि चतुष्फलक के प्रत्येक समतल के सदिश-क्षेत्र की दिशा, उस पर बाह्य ओर अभिलब की दिशा है, तो सिद्ध करो कि चारो सदिश-क्षेत्रों का योग शून्य है।

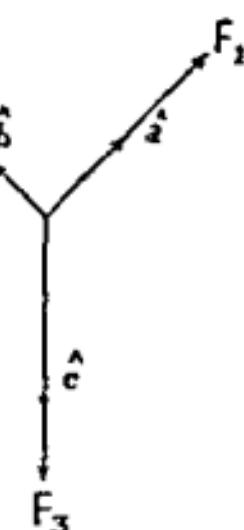
[संकेत बाह्यलब n_1 का परिमाण $=\frac{1}{2}\,(a\times b)$, n_2 का $=\frac{1}{2}$ $(b\times c)$.... ...]

4.15 यान्त्रिकी में अनुप्रयोग (Applications to mechanics)

लामी का प्रमेय: (Lami's Theorem) यदि एक बिन्दु पर कार्य करने वाले तीन बल सतुलन अवस्था मे हों तो प्रत्येक बल दूसरे दो बलो के बीच के कोण के ज्या (sine) के अनुपाती होता है।

माना तीन बल $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F}$ एक बिन्दु पर कार्य कर रहे हैं और वे सतुलन-अवस्था मे हैं।

माना $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ बल F_1, F_2, F_3 की दिशाओ मे इकाई सदिश हैं। चूँकि बल सतुलन मे हैं इसलिए उनका सदिश-योग

$$F_1\hat{a}+F_2\hat{b}+F_3\hat{c}=0. \qquad ...(1)$$

$\hat{a}$ और $\hat{b}$ से क्रमिक सदिश-गुणा करने पर

$$F_2\ \hat{a}\times\hat{b}+F_3\ \hat{a}\times\hat{c}=0.$$

$$\text{या } F_2\ \hat{a}\times\hat{b}=F_3\ \hat{c}\times\hat{a}. \qquad ....(2)$$

$$\text{और } F_2\ \hat{b}\times\hat{a}+F_3\ \hat{b}\times\hat{c}=0.$$

$$\text{या } F_1\hat{a}\times\hat{b}=F_3\hat{b}\times\hat{c} \qquad ....(3)$$

$$(2) \text{ और } (3) \text{ से } \frac{F_1}{|\hat{b}\times\hat{c}|}=\frac{F_2}{|\hat{c}\times\hat{a}|}=\frac{F_3}{|\hat{a}\times\hat{b}|}$$

$$\text{या } \frac{F_1}{\sin\theta_1}=\frac{F_2}{\sin\theta_2}=\frac{F_3}{\sin\theta_3}$$

4.16 बल द्वारा किया गया कार्य। (work done by a Force)

एक बल द्वारा किया गया कार्य एक अदिश राशि है और यह बल तथा बल की दिशा मे विस्थापन के घटक के गुणनफल के बराबर होता है।

यदि $\vec{F}$ और d बल-सदिश तथा विस्थापन-सदिश निरूपित करते हैं और इनके बीच का कोण θ है तो

किया गया कार्य $W = Fd \cos \theta = \vec{F} . \vec{d}$ होगा ....(1)

(1) से स्पष्ट है कि W धन, ऋण, या शून्य होगा यदि θ न्यून, अधिक या सम कोण है।

माना एक कण पर कई बल $F_1, F_2, \ldots F_n$ कार्य कर रहे हैं और विस्थापन–सदिश d है। तो कुल किया गया कार्य

$$W = \vec{F_1}. d + \vec{F_2}. d \ldots \vec{F_n}. d.$$

$$= (\sum_1^n \vec{F})\ d.$$

जोकि परिणामित बल द्वारा किए गए कार्य के बराबर है अतः एक बिन्दु पर कर रहे कई बलों का कार्य = उनके परिणामित बल द्वारा किया गया कार्य।

4.17 बल का घूर्ण या ऐंठ। (Moment or torgue of a force)

बल का परिमाण और दिशा होती है और कार्य-दिशा भी। अतः बल एक सरल-रेखा में स्थानीकृत (*localized*) सदिश-राशि है। एकमात्र सदिश F, केवल बल का परिमाण और दिशा निरूपित करता है। इसलिए इसकी कार्य-दिशा को अभिव्यक्त करने के लिए एक और सदिश की भी आवश्यकता होती है। प्रायः बल का किसी बिन्दु के प्रति घूर्ण को सदिश लिया जाता है।

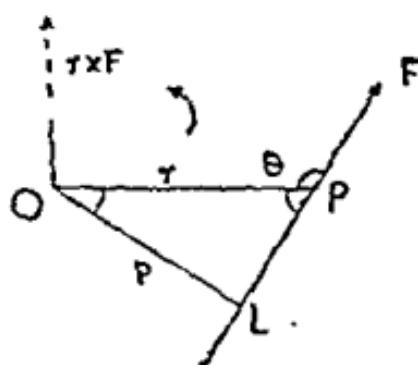
माना O कोई बिन्दु है और बल $\vec{F}$ की कार्य-दिशा पर किसी बिन्दु P का O के सापेक्ष स्थिति-सदिश r है और माना O से

$\vec{F}$ पर लंब $\vec{OL}$ है।

बल $\vec{F}$ का बिन्दु O के प्रति घूर्ण

$\vec{m} = r \times \vec{F}.$ ....(1)

$\vec{m}$ का परिमाण $= r$ F

$\sin \theta = OL.F = pF.$ ..(2)

और $\vec{m}$, r और $\vec{F}$, या समतल OPF पर लंब है और इसके इस ओर होता है जिससे O बिन्दु को बल वामावर्त-दिशा में घुमावे।

यदि बल $\vec{F}$ और घूर्ण $\vec{m}$ दिया हुआ हो तो बल पूर्णतया-परिमाण, दिशा और कार्य-दिशा मे अभिव्यक्त किया हुआ माना जाता है। कार्य-दिशा $\vec{m}$ के लंब और O में से होकर जाने वाले समतल पर स्थित होती है। और इसकी O से दूरी $p = m/F$ सूत्र से निकाली जा सकती है। m, सदिश $\vec{m}$ का मापांक है। और इसकी दिशा F की दिशा ही होनी है परन्तु p, O के उस ओर होगा कि OL से F की ओर घूर्णन, $\vec{m}$ की दिशा के सापेक्ष धन होगा।

4.18 किन्हीं बलों का घूर्ण (Moment of a number of forces)

माना बिन्दु P पर n बल $F_1, F_2 .. F_n$ कार्य कर रहे हैं और उनका परिणामित बल $R = F_1 + F_2 ... + F_n$ है। और O कोई बिन्दु है।

माना $\vec{OP} = r$, तो R का O अपेक्षा घूर्णन

$$\vec{m} = \vec{OP} \times R.$$

$$= \vec{OP} \times (\vec{F_1} + \vec{F_2} .... + \vec{F_n})$$

$$= r \times \vec{F_1} + r \times \vec{F_2} + ... r \times \vec{F_n}.$$

= अलग-अलग बलों के घूर्णों का सदिश-योग

अतः यदि कई बल किसी बिन्दु P पर कार्य कर रहे हो और उनको, उनके परिणामित बल R से बदला जाय तो कुल घूर्ण में कोई परिवर्तन नहीं होता।

4.19 किसी बल का किसी रेखा की अपेक्षा घूर्ण (Moment of a force about a line)

माना सदिश $\vec{F}$ और r के समकोणीय निर्देशांक घटक निम्न हैं

$$\vec{F} = xi + yj + zk. \quad ....(1)$$

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. ....(2)

i, j, k अक्षों की दिशाओं में इकाई-सदिश है। तो बल F का मूल-बिन्दु O के सापेक्ष घूर्ण $= \vec{m}$, और

$$\vec{m} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}).$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

या $\vec{m} = (yZ - zY)\,\mathbf{i} + (zX - xZ)\,\mathbf{j} + (xY - yX)\mathbf{k}$. ....(3)

m का i की दिशा में घटक

$= \mathbf{m}\,\mathbf{i} = (yZ - zY)$ है। ....(4)

स्थितिविज्ञान (Statics) में हम जानते है कि i का गुणांक, समीकरण (1) में, बल F का x – अक्ष के सापेक्ष घूर्ण है।

[i, x – अक्ष की दिशा में, इकाई-सदिश है।]

अतः (4) से F का x – अक्ष के सापेक्ष घूर्ण m i है।

चूंकि O को मूल-बिन्दु मान कर, O में से किसी भी रेखा को x – अक्ष माना जा सकता है। अतः बल F का O में से जाने वाली किसी रेखा के सापेक्ष घूर्ण, F का O के सापेक्ष घूर्ण का रेखा की दिशा में घटक, के समान है।

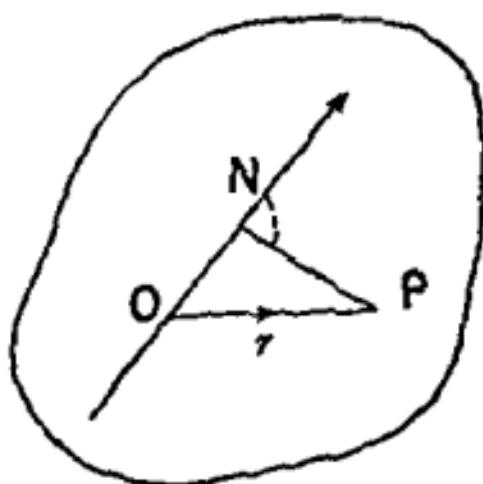
अतः निर्देशाक-अक्षों के सापेक्ष F के घूर्ण क्रमशः

m.i, m.j और m.k हैं।

नोटः–किसी बल का किसी बिन्दु के सापेक्ष घूर्ण एक सदिश-राशि है परन्तु किसी रेखा के सापेक्ष घूर्ण एक अदिश-राशि होती है।

ऊपर के विवरण से हम एक स्थानीकृत सदिश का, किसी बिन्दु के सापेक्ष, घूर्ण की परिभाषा इस प्रकार से भी दे सकते है।

परिभाषा—किसी बिन्दु r में से होकर जाने वाली रेखा में स्थानीकृत सदिश v का मूल-बिन्दु के सापेक्ष घूर्ण $r \times v$ है।

4.20 दृढ़ वस्तु का कोणीय-वेग । (Angular Velocity of a Rigid body)

माना एक दृढ़ वस्तु एक स्थिर-अक्ष ON के सापेक्ष घूम रही है और इसका कोणीय-वेग w है जोकि एक समान है। कोणीय-वेग एकमात्र विधि मे सदिश $\vec{A}$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है। इसका मापांक w है और दिशा अक्ष के समानान्तर, घूर्णन के अपेक्षा धन दिशा, की ओर है। अर्थात् उस दिशा मे जिस ओर एक दक्षिणावर्ती पेच को वस्तु के घूर्णन की ओर घुमाने से आगे बढ़ता है।

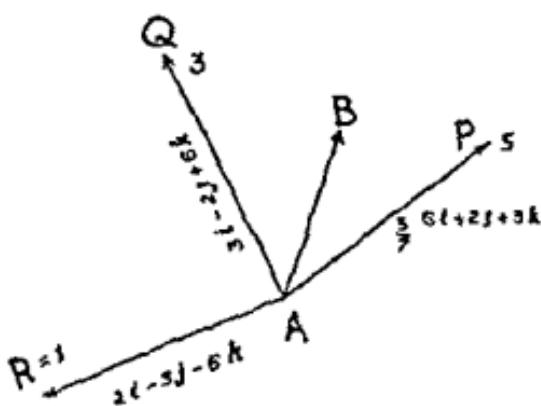
माना O, अक्ष पर एक स्थिर बिन्दु है, और P वस्तु का एक स्थिर (fixed) बिन्दु है। PN अक्ष पर लम्ब है और $\vec{OP}=r$। बिन्दु P एक ऐसे वृत्त पर घूम रहा है जिसकी त्रिज्या PN है। और $PN=a$ इसका वेग$=$ $PN\times w=a.w$

वेग की दिशा PN त्रिज्या और अक्ष, दोनो पर लंब है या समतल ONP पर लंब है। ऐसे वेग को $A\times r$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

उदाहरण. 1.

एक कण पर कार्य कर रहे बलों के परिमाण 5, 3, और 1 पौंड भार हैं और क्रमशः सदिश $(6i+2j+3k)$, $(3i-2j+6k)$ और

$(2i-3j-6k)$ की दिशा मे कार्य कर रहे हैं। बल स्थिर हैं और कए बिन्दु $A(2i-j-3k)$ से $B(5i-j+k)$ तक विस्थापित होता है। बलों द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो, जवकि लम्बाई की इकाई फुट है।

माना बल P, Q, R 5, 3 और 1 पौ. भार क्रमश सदिश $(6i+2j+3k)$, $(3i-2j+6k)$ और $(2i-3j-6k)$ की दिशा मे कार्य कर रहे हैं और मूलबिन्दु O है। तो

$\overrightarrow{OP}=(6i+2j+3k)$.

$\overrightarrow{OP}$ की दिशा मे इकाई सदिश

$=\frac{1}{7}(6i+2j+3k)$.

$\therefore$ 5 पौं. भार का बल $P=\frac{5}{7}(6i+2j+3k)$ ....(1)

इसी प्रकार बल Q $=\frac{3}{7}(3i-2j+6k)$. ....(2)

और R $=\frac{1}{7}(2i-3j-6k)$. ....(3)

P, Q, R का परिणामित बल $\overrightarrow{F}=(1)+(2)+(3)$.

$=\frac{1}{7}(41i+j+27k)$. .. (4)

विस्थापन-सदिश $\overrightarrow{d}$. $=\overrightarrow{AB}=(5i-j+k)-(2i-j-3k)$.

$=(3i+4k)$. ... (5)

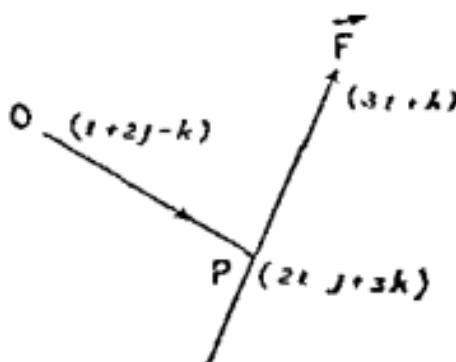
किया गया कार्य $w=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{d}=\frac{1}{7}(41i+j+27k)(3i+4k)$.

$$=\frac{1}{7}(123+108)=\frac{231}{7}=33 \text{ फुट}$$

पौं. भा:

2 बिन्दु $(2i-j+2k)$ में से होकर जाने वाले बल $(3i+k)$ का बिन्दु $(i+2j-k)$ की अपेक्षा ऐंठ (torque) ज्ञात करो।

(राज० 57, पटना 63, आगरा 63)

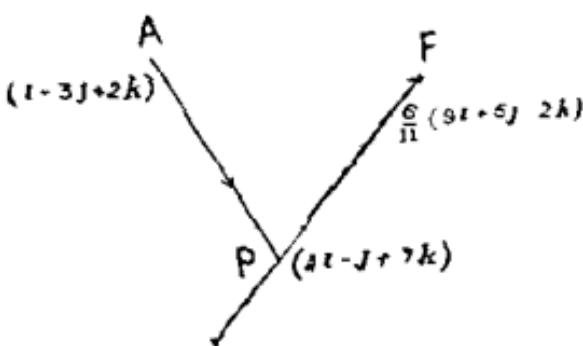
माना बिन्दु $(i+2j-k)$ और $(2i-j+3k)$ O और P हैं और बल $(3i+k)$ को $\vec{F}$ से निर्देशित किया जाता है। तो F का O की अपेक्षा घूर्ण

$$= \vec{OP} \times \vec{F}$$
$$=\{(2i-j+3k)-(i+2j-k)\}\times (3i+k).$$
$$=(i-3j+4k)\times(3i+k).$$
$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-3i+11j+9k).$$

3. 6 इकाई बल बिन्दु P $(4i-j+7k)$ में से सदिश $(9i+6j-2k)$ की दिशा मे कार्य करता है। इसका घूर्ण बिन्दु A $(i-2j+2k)$ की अपेक्षा ज्ञात करो। और बिन्दु A में से निर्देशाक्ष-अक्षो के समान्तर अक्षो के सापेक्ष घूर्ण भी ज्ञात करो।

बल की दिशा में इकाई सदिश

$$=\frac{1}{11}(9\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}). \quad \ldots(1)$$

∴ 6 इकाई का बल $\frac{6}{11}(9\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k})$

सदिश द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

$$\overrightarrow{AP}=(4\mathbf{i}-\mathbf{j}+7\mathbf{k})-(\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k})$$

$$=(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k}) \quad \ldots(2)$$

बिन्दु A के सापेक्ष घूर्ण

$$\overrightarrow{m}=\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{F}.$$

$$=(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k})\times\frac{6}{11}(9\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}).$$

$$=\frac{6}{11}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 2 & 5\\ 9 & 6 & -2\end{vmatrix}=\frac{6}{11}(-34\mathbf{i}+51\mathbf{j}).$$

$$=\left(-\frac{204}{11}\mathbf{i}+\frac{306}{11}\mathbf{j}\right) \quad \ldots(3)$$

अक्षों के सापेक्ष घूर्ण $=\overrightarrow{m}\cdot\mathbf{i},\ \overrightarrow{m}\cdot\mathbf{j},\ \overrightarrow{m}\cdot\mathbf{k}.$

$=\ -\frac{204}{11};\ \frac{306}{11}$ और O, इकाई.

4. एक दृढ़ वस्तु एक स्थिर बिन्दु $(3\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k})$ के सापेक्ष 5 रेडियन प्रति सैकण्ड के कोणीय-वेग से भ्रमि (spin) कर रही है। और

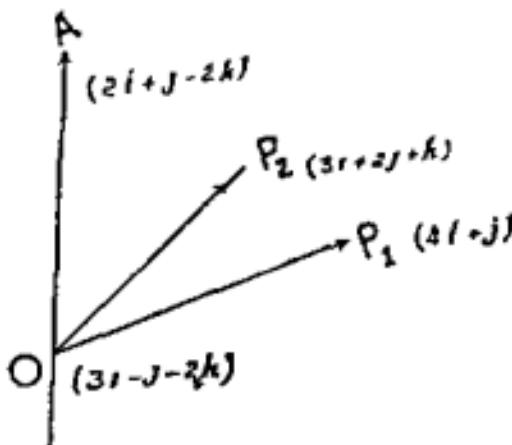
घूर्णन अक्ष सदिश $(2i+j-2k)$ की दिशा मे है। सिद्ध करो कि बिन्दु $(4i+j)$ और $(3i+2j+k)$ पर वेग क्रमश: $5(2i-2j+k)$ और $5(3i-2j+2k)$ हैं।

माना स्थिर बिन्दु O, $(3i-j-2k)$ है। और अक्ष OA सदिश $(2i+j-2k)$ की दिशा मे है।

$\overrightarrow{OA}$ की दिशा मे इकाई-सदिश

$$=\tfrac{1}{3}(2i+j-2k). \qquad \ldots(1)$$

अत. कोणीय-वेग सदिश $=\tfrac{5}{3}(2i+j-2k).$ ..(2)

A
$(2i+j-2k)$
P_2 $(3i+2j+k)$
P_1 $(4i+j)$
O $(3i-j-2k)$

$$\overrightarrow{OP}=-(3i-j-2k)+(4i+j)$$
$$=(i+2j+2k), \qquad ..(3)$$

$$\overrightarrow{OP_2}=(3i+2j+k)-(3i-j-2k)$$
$$=(3j+3k) \qquad ..(3)$$

P_1 पर वेग $V_1=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OP_1}=\tfrac{5}{3}(2i+j-2k)\times(i+2j+2k)$

$$=\tfrac{5}{3}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\tfrac{5}{3}(6i-6j+3k)$$

$$=5(2i-2j+k) \qquad \ldots(4)$$

$$P_2 \text{ पर वेग } = \vec{OA} \times \vec{OP_2} = \tfrac{5}{3}(2i+j-2k)\times(3j+3k)$$
$$= 5(3i-2j+2k). \qquad \dots (5)$$

प्रश्नावली 8

1. सिद्ध करो कि बिन्दु (5, 2, 4) मे से होकर जाने वाले बल (4, 2, 1) का बिन्दु (3, −1, 3) की अपेक्षा घूर्ण (1, 2, −8) है।

2. 5 इकाई बल सदिश $(8i+4j-k)$ की दिशा मे कार्य कर रहा है और बिन्दु $(3i-j+6k)$ मे से गुजरता है। इसका बिन्दु O $(i+2j-3k)$ के सापेक्ष घूर्ण ज्ञात करो। और O मे से निर्देशाक-अक्षो के समान्तर अक्षो के सापेक्ष भी घूर्ण ज्ञात करो।

3. एक दृढ़ वस्तु 4 रेडियन प्रति सैकण्ड के कोणीय-वेग से, बिन्दु (1, 3, −1) में से गुजरने वाले सदिश (0, 3, −1) की दिशा में, अक्ष के सापेक्ष भ्रमि (spin) करती है। बिन्दु (4, −2, 1) पर इसका वेग ज्ञात करो।

[आगरा, 62]

4. एक कण का कोणीय-वेग 3 रेडियन प्र० सैं० है। और घूर्णन-अक्ष बिन्दुओ (1, 1, 2) और (1, 2, −2) मे से गुजरता है। तो बिन्दु (3, 6, −4) पर वेग ज्ञात करो।

[पंजाब, 59)

5. एक दृढ वस्तु एक स्थिर बिन्दु (3, −2, −1) के सापेक्ष 4 रेडियन प्र० सैं० के कोणीय-वेग से भ्रमि कर रही है। घूर्णन-अक्ष की दिशा (1, 2, −2) है। तो सिद्ध करो कि बिन्दु (4, 1, 1) पर वेग $\frac{4}{3}$ (10, −4, 1) है।

6. एक 15 इकाई बल, सदिश $(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ की दिशा मे कार्य कर रहा है और विन्दु $(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ मे से गुजरता है। तो इसका बिन्दु $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ के सापेक्ष घूर्ण ज्ञात करो।

7. एक कण पर बल $(4\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})$ और $(3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$ कार्य कर रहे हैं और इसको, बिन्दु $(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ से $(5\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k})$ तक, विस्थापित करते हैं। कुल किया गया कार्य ज्ञात करो।

[लखनऊ 60, बिहार 60, कलकत्ता 62, आगरा 67]

5

तीन और चार सदिशों का गुणनफल

5.1 परिचय गुणज गुणनफल (multiple products)

पिछले अध्याय मे हम देख चुके है कि दो सदिशों को हम दो प्रकार से सम्बन्धित कर सकते हैं (1) अदिश-गुणनफल a.b, जिससे अदिश-राशि प्राप्त होती है और (2) सदिश-गुणनफल $a \times b$, जिससे हमे एक सदिश-राशि मिलती है। हम $b \times c$ के साथ एक तीसरे सदिश a का बिन्दु-गुणनफल और सदिश-गुणनफल भी प्राप्त कर सकते है। गुणन $a \times$ (b c) या a. (b c) से कोई अर्थ नही निकलता क्योकि (b.c) तो एक अदिश-राशि है। और a. (b.c) तो (b.c) a है। अर्थात् a की दिशा मे सदिश जिसका मापांक abc Cos θ है (θ, b और c के बीच का कोण है)

5.2 त्रिक अदिश-गुणनफल (Scalar-triple-product.)

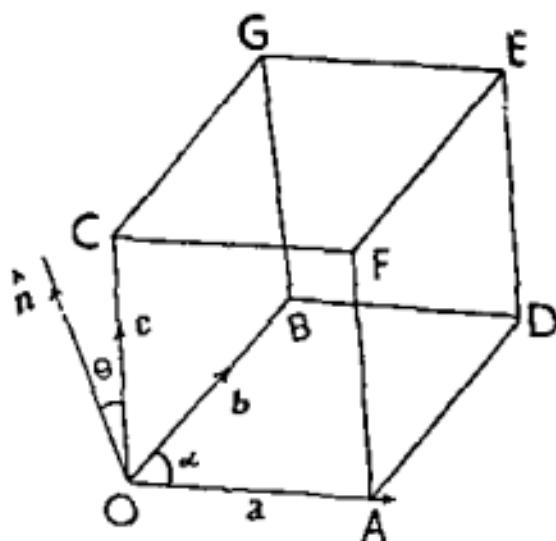
यदि a b और c तीन सदिश है तो a का, b और c के सदिश-गुणनफल से, अदिश-गुणा करने से एक अदिश-राशि प्राप्त होती है जिसको सदिशों a, b, c का त्रिक-अदिश-गुणनफल कहते है। इसको a. $(b \times c)$ या [abc] या [a, b, c] लिखा जाता है। इसको मिश्रित-गुणनफल (mixed) भी कहते है क्योंकि इसमे बिन्दु और बज्र दोनों ही होते है।

ज्यामितीय व्याख्या : (geometrical interpretation)

माना a और b के बीच का कोण α है और $a \times b$ और c के बीच θ है।

और $a \times b = ab \sin \alpha\, \hat{n}$, ..(1)

$\hat{n}$ इकाई सदिश b और c के समतल पर लंब की दिशा मे है।

और, $\hat{n}$ और c के बीच का कोण θ है। अब

$$\mathbf{c}.\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}\ (ab \sin \alpha\ \hat{\mathbf{n}})$$
$$= abc \sin \alpha \operatorname{Cos} \theta. \qquad \text{....(2)}$$

अब एक ऐसा समान्तरफलक (parallelepiped) खीचो जिसके तीन सगामी किनारो OA, OB, OC की लम्बाई और दिशा क्रमश. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ की हो। समान्तर चतुर्भुज OADB का सदिश क्षेत्रफल $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ है। और इसकी दिशा $\hat{n}$ की दिशा है जोकि OADB पर लम्ब है।

अब $\mathbf{c}.\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{c}.\ (ab \sin \alpha\ \hat{\mathbf{n}})$ =(क्षेत्र OADB). OC Cos $\theta = \pm V$ समान्तरफलक का आयतन है। ... (3)

यदि θ न्यून है तो त्रिक-गुणनफल धन होगा। अर्थात् $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ एक दक्षिणावर्ती सदिशो की पद्धति बनाते हैं।

$\because\ \mathbf{n}.\mathbf{c} = \mathbf{c}.\mathbf{n}$

$\therefore\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\ \mathbf{c} = \mathbf{c}.\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$

या $[\mathbf{abc}] = [\mathbf{cab}].$ ... (4)

पुन: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$

तो $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\ .\ \mathbf{c} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a}).\ \mathbf{c}.$

या $[\mathbf{abc}] = -[\mathbf{bac}].$ ....(5)

इसी प्रकार $\mathbf{c}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -\mathbf{c}\ (\mathbf{b}\times\mathbf{a})$.

या $[\mathbf{cab}] = -[\mathbf{cba}]$. ...(6)

इसी प्रकार $\mathbf{b}\ (\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = (\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\ \mathbf{a}$. ....(7)

अत

$$V = [\mathbf{abc}] = [\mathbf{bca}] = [\mathbf{cab}]$$

$$= -[\mathbf{acb}] = -[\mathbf{cba}] = -[\mathbf{bac}]. \quad ...(8)$$

(8) मे दक्षिण-पक्ष में हम देखते हैं कि यदि a, b, c के चक्रीय क्रम को बदल दें तो गुणनफल ऋण हो जाता है। इससे हम यह परिणाम निकाल सकते हैं कि त्रिक-अदिश-गुणनफल का मान उसके खण्डो के क्रम पर ही निर्भर करता है और बिन्दु तथा वज्र की स्थिति मे स्वाधीन है। अत बिन्दु और वज्र अदल-बदल करने से गुणनफल के मान मे कोई अन्तर नही पडता।

5 3 अदिश-त्रिक-गुणनफल को घटको में अभिव्यक्त करना। **Scalar-triple-product in terms of components.)**

माना i, j, k तीन इकाई सदिश है जो परस्पर लम्ब हैं। और a,b,c तीन सदिश हैं कि

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

अब $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}$ .. (1)

दोनो ओर c से अदिश-गुणा करने से

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\ \mathbf{c} = \{(a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}\}.$$

$$(c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}).$$

$$= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1).$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad ....(2)$$

जोकि समानान्तरफलक का आयतन है जिसका एक कोना मूल-बिन्दु है।

उप-प्रमेय–1. यदि दो सदिश समान या समानान्तर हों, जैसे $\mathbf{b}=k\,\mathbf{c}$ तो ऊपर (2) मे दो पंक्तियाँ (दूसरी और तीसरी) सर्वसम होगी और सारणिक का मान शून्य होगा।

[राज॰ 1972]

$$\therefore\ [\mathbf{aab}]=[\mathbf{abb}]=[\mathbf{cbc}]=0. \qquad \dots(3)$$

अतः यदि दो सदिश समान या समानान्तर हो तो उनका अदिश-त्रिक-गुणनफल शून्य होगा।

उप-प्रमेय–2. विशेष स्थिति मे $[\mathbf{i\ j\ k}]=1.$ ..(4)

क्योंकि ऊपर (2) मे विकर्ण को छोड शेष सब अवयव शून्य हैं।

उप-प्रमेय–3. सदिश–त्रिक–गुणनफल $[\mathbf{abc}]$ को तीन असमतलीय सदिशो $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ के पदो मे अभिव्यक्त करना।

माना तीन सदिश $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ऐसे हैं कि

$\mathbf{a}=a_1\mathbf{l}+a_2\mathbf{m}+a_3\mathbf{n},$

$\mathbf{b}=b_1\mathbf{l}+b_2\mathbf{m}+b_3\mathbf{n},$

$\mathbf{c}=c_1\mathbf{l}+c_2\mathbf{m}+c_3\mathbf{n}$

तो $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(b_2c_3-c_2b_3)\ \mathbf{m}\times\mathbf{n}+(b_3c_1-c_3b_1)\ \mathbf{n}\times\mathbf{l}+ (b_1c_2-c_1b_2)\ \mathbf{b}\times\mathbf{m}$ ....(1)

$\mathbf{a}\ (\mathbf{b}\times\mathbf{c})=a_1\ (b_2c_3-c_2b_3)\ \mathbf{l}\ \ \mathbf{m}\times\mathbf{n}+a_2\ (b_3c_1-c_3b_1)\ \mathbf{m}.\ \mathbf{n}\times\mathbf{l}+a_3(b_1c_2-c_1b_2)\ \mathbf{n}\ \mathbf{l}\times\mathbf{m}.$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}[\mathbf{l\ m\ n}]. \qquad ..(2)$$

क्योंकि $[\mathbf{n\ l\ l}]=[\mathbf{m\ n\ n}]=[\mathbf{m\ m\ l}]$ इत्यादि शून्य है और $[\mathbf{l\ m\ n}]=[\mathbf{m\ n\ l}]=[\mathbf{n\ l\ m}].$

उप-प्रमेय–4. हम पिछले अध्याय मे सिद्ध कर चुके हैं कि अदिश-गुणनफल और सदिश-गुणनफल दोनो वटन-नियम का पालन करते हैं। अतः

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}+\mathbf{d},\ \mathbf{c}+\mathbf{e}]=\mathbf{a}.\ (\mathbf{b}+\mathbf{d})\times(\mathbf{c}+\mathbf{e})$$

$$=\mathbf{a}\ [(\mathbf{b}\times\mathbf{e})+(\mathbf{b}+\mathbf{e})+(\mathbf{d}\times\mathbf{c})+(\mathbf{d}\times\mathbf{e})].$$

$$=[\mathbf{abc}]+[\mathbf{abe}]+[\mathbf{adc}]+[\mathbf{ade}].$$

प्रत्येक पद में चक्रीय क्रम को बनाए रखा है।

5.4 प्रतिबन्ध कि तीन सदिश समतलीय हों (Condition that three vectors are Coplanar)

अनुच्छेद 5.2 से स्पष्ट है कि यदि तीन सदिश **a**, **b**, **c** समतलीय है तो $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ के एक ही तल मे होने से समानान्तरफलक का आयतन शून्य हो जाता है। विलोमत· यदि **a** $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0$ तो सदिश समतलीय होगे। क्योंकि $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, दोनों सदिशो **b** और **c**, के समतल पर लम्ब है। और यदि $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0$, तो इसका अर्थ यह हुआ कि $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ सदिश **a** पर भी लम्ब है। इसलिए **a**,**b**,**c** समतलीय हैं।

अत: अदिश-त्रिक-गुणनफल [**a b c**] शून्य होगा यदि और केवल यदि (iff) तीनो सदिश समतलीय हैं।

5.5 सदिश-त्रिक-गुणनफल। (Vector-triple-product)

अब हम **a** और $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ के वज्र-गुणनफल पर विचार करते हैं।

माना $\vec{P}=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. ....(1)

यह एक सदिश है क्योंकि यह **a** और $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, दो सदिशो का सदिश-गुणनफल है। $\vec{P}$, **a** और $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ दोनो पर लम्ब है। परन्तु $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ भी **b** और **c** दोनो पर लम्ब है। इसलिए $\vec{P}$ सदिश **b** और **c** के समतल मे स्थित है और **a** इस पर लम्ब है।

अत· हम $\vec{P}$ को **b** और **c** के पदो मे अभिव्यक्त कर सकते हैं।

माना $\vec{P}=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=l\mathbf{b}+m\mathbf{c}$ ....(2)
(l और m अदिश हैं)

अब l और m का मान ज्ञात करने के लिए एक, तीन इकाई सदिश **i**, **j**, **k**, जो परस्पर लम्ब हों, उनकी दक्षिणावर्ती पद्धति का विचार करो। और ऐसे समजित करो कि **j**, **b** के समानान्तर हो। **k** इस पर लम्ब हो तथा

b और c के समतल में स्थित हो। तब हम सदिश a, b, c को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

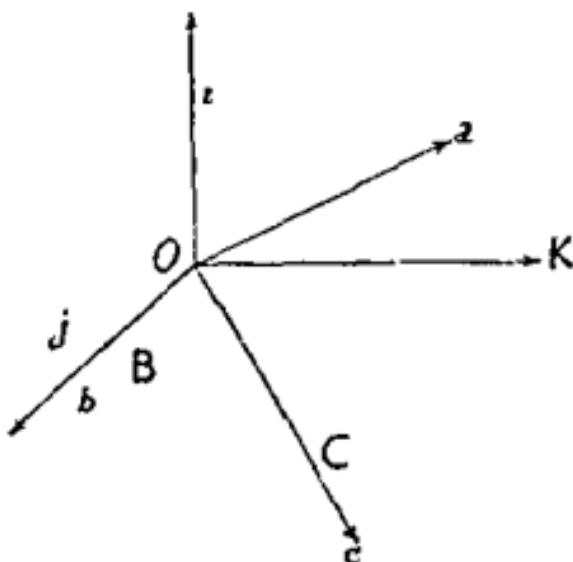
$$\mathbf{b}=b\mathbf{j}. \quad ....(2)$$

$$\mathbf{c}=0\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k} \quad ...(3)$$

और $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$. ....(4)

(2) और (3) से

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=b\mathbf{j}\times(c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k})$$

$$=bc_3\mathbf{i} \quad ...(5)$$

$$\therefore\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times bc_3\mathbf{i}.$$

$$=a_3c_3b\mathbf{j}-a_2bc_3\mathbf{k}. \quad ....(6)$$

$a_2c_2b\mathbf{j}$ को जोडने और घटाने से

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(a_2c_2+a_3c_3)b\mathbf{j}-a_2b(c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}).$$

$$=(\mathbf{a}\ \mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\ \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad ....(7)$$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a}\ \mathbf{b} & \mathbf{a}.\mathbf{c} \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

$$=(\mathbf{a}\ \mathbf{b})\mathbf{c}-(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} \quad ...(8)$$

नोट:—सदिश-त्रिक-गुणनफल में कोष्ठक (bracket) के स्थान को बदल नहीं सकते। चूँकि $a\times(b\times c)$ एक सदिश है जो b और c सदिशों में अभिव्यक्त किया जा सकता है। और $(a\times b)\times c$ सदिश a और b सदिशों में अभिव्यक्त किया जा सकता है। अतः यह दोनो गुणनफल सामान्य रूप मे भिन्न सदिश ही निरूपित करते हैं।

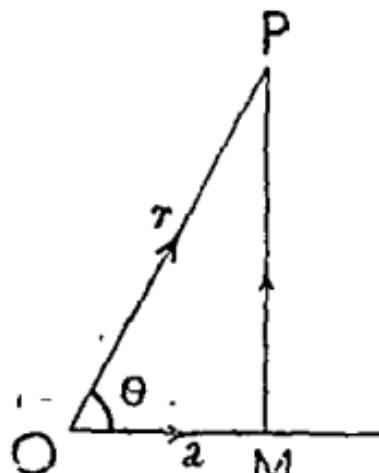
यदि b और c समानान्तर हैं तो $b\times c=0$ तो त्रिक-गुणनफल भी शून्य होगा।

सदिश-त्रिक-गुणनफल का परिणाम निम्न विधि से याद किया जा सकता है।

सदिश-त्रिक-गुणनफल =(वाह्य दूरस्थ) निकटवर्ती—(वाह्य निकटवर्ती) दूरस्थ।

5.6 सदिश के घटक (Resolute of a vector.)

माना सदिश $\overrightarrow{OP}=r$ का, a और r के समतल में दो लम्ब घटकों में विघटन करना है। एक तो a के समान्तर, दूसरा इसके लम्ववत।

यदि a और r के बीच का कोण θ है। और $\hat{a}$, a की दिशा में इकाई-सदिश है तो r का a की दिशा में घटक=

$$\overrightarrow{OM}=r\cos\theta\,\hat{a}=\frac{a\,r\cos\theta}{a^2}.\,a=\frac{a.r}{|a|^2}\,a. \qquad ....(1)$$

[r, सदिश r का मापांक है।]

a की दिशा के लम्ब, घटक $=\overrightarrow{MP}=r-\overrightarrow{OM}=r-\frac{a.r}{a^2}\,a.$

$$=\frac{(a.a)r-(a.r)a}{a^2}=\frac{a\times(r\times a)}{a^2}. \qquad ....(2)$$

उदाहरण 1.

सदिश-त्रिक-गुणनफल के सूत्र $a \times (b \times c) = (a.c)b - (a\, b)c$ का सत्यापन करो जबकि

$a = (i - 2j + 3k),\ b = (2i + j - k),\ c = (j + k)$

अब $b \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 2j + 2k.$ ....(1)

$a \times (b \times c) = (i - 2j + 3k) \times (2i - 2 + 2k).$

$= -2i \times j + 2i \times k - 4j \times i - 4j \times k + 6k \times i$
$- 6k \times j.$

$= (2i + 4j + 2k).$ ....(2)

$a.c = -2 + 3 = 1.$

$\therefore\ (a.c)b = 2i + j - k.$. (3)

$a.b = (2 - 2 - 3) = -3.$

$\therefore\ (a.b)c = -3j - 3k.$ ....(4)

$(3) - (4) = (a\,c)b - (a\,b)c = (2i + 4j + 2k) = a \times (b \times c).$

(2) से

2. सिद्ध करो कि चार बिन्दु

$4i + 5j - k,\ -j - k,\ 3i + 9j + 4k$ और $-4i + 4j + 4k$

समतलीय हैं।

[लखनऊ 50, बनारस 50, बड़ोदा 63]

माना बिन्दु O के सापेक्ष चार बिन्दु A, B, C, D दिए हुए सदिशों से अभिव्यक्त किए गए हैं अर्थात्

$\overrightarrow{OA} = 4i + 5j + k.$

$\overrightarrow{OB} = -j - k.$

$\overrightarrow{OC} = 3i + 9j + 4k.$

$\vec{OD} = -4i+4j+4k.$

तो $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -4i-6j-2k = \vec{p}.$ ....(1)

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = 3i+10j+5k = \vec{q}.$ ....(2)

$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = -7i-5j = \vec{r}.$ ....(3)

सदिश $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ समतलीय होंगे यदि इनका सदिश-त्रिक-गुणनफल शून्य है।

$$\text{अब } [\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{r}] = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -4(25)-3(-10)-7(-10).$$

$=0.$ अत: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ समतलीय हैं। या बिन्दु A, B, C, D एक ही समतल पर स्थित हैं।

3. सिद्ध करो कि $[lmn]\,[abc] = \begin{vmatrix} l.a & l.b & l.c \\ m.a & m.b & m.c \\ n.a & n.b & n.c \end{vmatrix}$ और इसका कार्तीय (Cartesian) तुल्य ज्ञात करो।

[पंजाब 60, आगरा 56, 65, बनारस 52, लखनऊ 52, 56, पटना 54]

माना $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k,$

$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k,$

$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k,$

और $l = l_1 i + l_2 j + l_3 k,$

$m = m_1 i + m_2 j + m_3 k,$

$n = n_1 i + n_2 j + n_3 k.$

$$[lmn]\,[abc] = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad .(1)$$

दक्षिण-पक्ष मे दो सारणिको का गुणन एक 3-श्रेणी का सारणिक है जिसके अवयव l. a, l. b इत्यादि हैं। अतः

$$[lmn]\ [abc] = \begin{vmatrix} l.a & l b & l c \\ m a & m b & m c \\ n.a & n b & n c \end{vmatrix}.$$

(1) का कार्तीय तुल्य, दो सारणिको के गुणन का नियम है।

प्रश्नावली 9

1. सिद्ध करो कि $a\times(r\times a)=(a\times r)\times a$. और

   (i) $a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0.$

   (ii) $a\times(b+c)+b\times(c+a)+c\times(a+b)=0.$

[पंजाब 60, आगरा 53, 65, 67, विक्रम 63, नागपुर 63, दिल्ली 63]

2. सिद्ध करो कि

   $(a+b).\ [(b+c)\times(c+a)]=2[abc].$

   (Cal 51, 61)

3. सदिश-त्रिक-गुणनफल के सूत्र

   $a\times(b\times c)=(a.c)\ b-(a.b)\ c$ का सत्यापन करो जबकि

   $a=i-2j+k,\ b=2i+j+k,\ c=i+2j-k.$

4. अदिश-त्रिक-गुणनफल ज्ञात करो

   $[(2, -3, 1), (1, -1, 2), (2, 1, 1)].$

5. सिद्ध करो कि बिन्दु A (4, 5, 1), B (0, −1, −1), C (3, 9, 4) और D (−4, 4, 4) समतलीय हैं।

6. p का मान ज्ञात करो कि बिन्दु (3, 2, 1), (4, p, 5), (4, 2, −2) और (b, 5, −1) समतलीय हो।

7. सिद्ध करो कि $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$ (iff) यदि और केवल यदि $(a\times c)\times b=0$ या यदि a और c समरेख-सदिश हैं।

   [दिल्ली 58, कर्नाटक 63]

8. यदि $a+b+c=0$ तो सिद्ध करो कि
$a \times b = b \times c = c \times a.$

[ए. एम. आई. ई 60]

9. सिद्ध करो कि
$(a-d).(b-c)+(b-d)(c-a)+(c-d)(a-b)=0.$

10. यदि a, b, c तीन इकाई सदिश हों और $a \times (b \times c) = \frac{1}{2}b$ तो a, b और c के साथ जो कोण बनाता है वे ज्ञात करो। {b और c असमान्तर है)।

{राज० 1971, नागपुर 63.}

11 उस समान्तरफलक (parallelepiped) का आयतन ज्ञात करो जिसके किनारे a, b, c सदिशों द्वारा अभिव्यक्त किए गए हैं और
$a=(2i-3j+4k),\ b=(i+2j-k),\ c=(3i-j+2k)$

[कर्नाटक 63]

12. यदि a, b, c मूल-बिन्दु से, बिन्दु A, B, C तक तीन सदिश हैं तो सिद्ध करो कि
$a \times b + b \times c + c \times a$ समतल ABC पर लम्ब है।

13 यदि l, m, n तीन असमतलीय-सदिश हों तो

$$[l\ m\ n]\ (a \times b) = \begin{vmatrix} l.a & l.b & l \\ m.a & m.b & m \\ n.a & n.b & n \end{vmatrix}$$ (आगरा 49, नागपुर 62)

14. निम्न सर्वसमिका (identity) की स्थापना करो
$2a = i \times (a \times i) + j \times (a \times j) + k \times (a \times k).$
जबकि i, j, k लम्बप्रसामान्यक त्रयी है। (Orthonormal triads). है।

15. सिद्ध करो कि

$$[a\ b\ c]^2 = \begin{vmatrix} a.a & a.b & a.c \\ b.a & b.b & b.c \\ c.a & c.b & c.c \end{vmatrix}.$$

16 गुणनफल का मान ज्ञात करो

$$\{(i+2j-k)\times(3i+2j-4k)\}\times(2i-j+3k).$$

5.7 चार सदिशों का अदिश-गुणनफल (Scalar-product of four vectors)

चार सदिश a, b, c, d दिए हुए हो तो गुणनफल $(a\times b).(c\times d)$ या $(a\times c).(b\times d)$ इत्यादि चार सदिशों का अदिश-गुणनफल कहलाता है। यह एक अंक या अदिश-राशि होती है। चूँकि अदिश-त्रिक-गुणनफल में हम बिन्दु और वज्र को आपस मे बदल सकते हैं अतः हम ऊपर के गुणनफल को भी निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$$(a\times b).(c\times d)=a.b\times(c\times d).$$
$$=a.\left[(b.d)\,c-(b.c)\,d\right].$$
$$=(b.d)(a.c)-(b.c)(a.d). \quad ....(1)$$

इसको सारणिक के रूप में भी इस प्रकार से लिख सकते हैं—

$$(a\times b).(c\times d)=\begin{vmatrix} a.c & a.d \\ b.c & b.d \end{vmatrix}. \quad ...(2)$$

समीकरण (2) लगरांज-सर्वसमिका (Lagrange's identity) कहलाती है।

विशेष स्थिति मे यदि $c=a$, और $b=d$ तो

$$(a\times b).(a\times b)=a^2b^2-(a.b)^2$$
$$=a^2b^2-a^2b^2\cos^2\theta=a^2b^2\sin^2\theta....(3)$$

5.8 चार सदिशों का सदिश-गुणनफल (Vector product of four vectors)

हम अब चार सदिशो के सदिश-गुणनफल $(a\times b)\times(c\times d)$ पर विचार करते है। यह सदिश $a\times b$ पर लम्ब है इसलिए a और b के समतल मे स्थित है। अतः इसको a और b के पदो में अभिव्यक्त कर सकते हैं। इसी प्रकार चूँकि यह c और d के समतल मे भी स्थित है इसको c और d के पदो मे भी अभिव्यक्त कर सकते हैं। अतः यह समतल a b और c d के समतल की प्रतिच्छेद-रेखा के समान्तर है।

इसको a और b मे अभिव्यक्त करने के लिए हम इसको $(a\times b)\times\vec{m}$ सदिश-त्रिक-गुणनफल मान लेते हैं जबकि $\vec{m}=c\times d$

अब $(a\times b)\times \vec{m}=(a.\vec{m})b\times(b.\vec{m})\,a.$

$=[a.(c\times d)]b-[b\,(c\times d)]\,a.$

$=[a\;c\;d]b-[b\;c\;d]\;a$. (1)

[राज० 61 कल० 62]

इसको सदिश c और d से भी अभिव्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि

माना $\vec{n}=a\times b$

$\therefore\;(a\times b)\times(c\times d)=\vec{n}\times(c\times d)$

$=(\vec{n}\,d)c-(\vec{n}\,c)d$

$=[a\;b\;d]c-[a\;b\;c]d.$ ....(2)

[बड़ौदा 60, राज० 61]

उपप्रमेय 1 (1) और (2) को समान करने पर हमें a b, c, d में एकघात सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$-[bcd]a+[acd]\;b=[abd]\;c-[abc]\;d$

या $[bcd]\;a-[acd]\;b+[acd]\;c-[abc]\;d=0$ (3)

यदि (3) में d के स्थान पर r लिखें तो

$$r=\frac{[rbc]a+[rca]b+[rab]c}{[abc]}\qquad ....(4)$$

परन्तु $[abc]\neq 0.$ [आगरा 60]

उपप्रमेय 2. सम्बन्ध (4) के लिए दूसरी विधि भी है।

यदि *a, b*, c सदिश असमतलीय हो, अर्थात् $[abc]\neq 0.$ तो हम r का a, b, c की दिशाओं में विघटन कर सकते हैं।

माना $r=xa+yb+zc.$ ....(5)

दोनों ओर $(b\times c)$ से अदिश-गुणा करने पर

$[rbc]=x[abc].\;\;[\because\;[bbc]=[bcc]=0.]$

$$\therefore\ x = \frac{[rbc]}{[abc]}.$$

इसी प्रकार से (c × a) और (a × b) से क्रम से अदिश–गुणा करने से हमें प्राप्त है

$$y = \frac{[rca]}{[abc]}, \text{ और}$$

$$z = \frac{[rab]}{[abc]}.$$

$$\therefore\ r = \frac{[rbc]a + [rca]b + [rab]c}{[abc]} \qquad ....(6)$$

5.9 व्युत्क्रम-सदिशों की पद्धति (Reciprocal system of vectors)
यदि सदिश a', b', c' की परिभाषा निम्न प्रकार से करें कि

$$a' = \frac{b \times c}{[abc]},\ b' = \frac{c \times a}{[abc]},\ c' = \frac{a \times b}{[abc]}. \qquad ....(1)$$

जबकि a, b, c तीन असमतलीय–सदिश हैं । अर्थात् $[abc] \neq 0$.

a', b', c' का क्रमशः a, b, c से अदिश–गुणा करो । तो

$$a.a' = b.b' = c.c' = 1. \qquad ....(2)$$

या हम लिख सकते हैं कि

$$a' = a^{-1},\ b' = b^{-1},\ c' = c^{-1} \qquad ... (2)$$

सम्बन्ध (2) के कारण दोनो पद्धतिया a, b, c और a', b', c' एक दूसरे का व्युत्क्रम कहलाती हैं ।

लवप्रसामान्यक सदिश–त्रयी (orthonormal vector triads) i, j और k एक स्व–व्युत्क्रम पद्धति बनाते हैं ।

a, b, c का a', b', c_1' मे मान निकालने के लिए हमे प्राप्त है

$$b' \times c' = \frac{(c \times a) \times (a \times b)}{[abc]^2} = \frac{(cab)a - (aab)c}{[abc]^2}$$

$$= \frac{a}{[abc]}. \qquad ....(3)$$

इसी प्रकार $c' \times a' = \frac{b}{[abc]}$, और $(a' \times b') = \frac{c}{[abc]}$. ....(4)

(3) में दोनो ओर a' का अदिश-गुणा करने पर

$$a'.(b' \times c') = \frac{a.a'}{[abc]} = \frac{1}{[abc]}.$$

या $[a'\ b'\ c']\ [abc] = 1$. ....(5)

[आगरा 50 57, राज० 59, 62]

और $\frac{b' \times c'}{[a'b'c']} = a$ ....(6)

इसी प्रकार $\frac{c' \times a'}{[a'b'c']} = b$, और $\frac{a' \times b'}{[a'b'c']} = c$ ....(7)

(1), (6) और (7) से स्पष्ट है कि a, b, c और a' b', c' एक-दूसरे के व्युत्क्रम पद्धतियां हैं। और (5) से हम देखते हैं कि $[abc]$ और $[a'\ b'\ c']$ एक-दूसरे के व्युत्क्रम है। और दोनो के चिह्न भी एक ही हैं।

इन दोनों पद्धतियों में एक विशेषता यह है कि यदि प्रथम पद्धति के किसी एक सदिश का दूसरी पद्धति के किसी सदिश में अदिश-गुणा करें तो गुणनफल शून्य होगा। उदाहरण के लिए—

$$a.b' = \frac{a.(c \times a)}{[abc]} = \frac{[aca]}{[abc]} = 0.$$ ....(8)

उपप्रमेय 1. अनुच्छेद 5.7 में समीकरण (4) को हम a', b', c' के पदों में भी लिख सकते हैं।

$$r = \frac{[rbc]\ a}{[abc]} + \frac{[rca]\ b}{[abc]} + \frac{[rab]\ c}{[abc]}$$

या $r = (r.a')a + (r.b')b + (r.c')c$ ....(9)

इसी प्रकार सममिति से

$r = (r.a)\ a' + (r.b)\ b' + (r.c)\ c'$ ...(10)

i, j, k की पद्धति स्व-व्युत्क्रम होने के कारण

$r = (r.i)\ i + (r.j)\ j + (r.k)\ k$ ...(11)

5.10 दो उपयोगी विघटन । (Two useful decompositions)

(1) यदि a, b, c असमतलीय-सदिश हों तो सिद्ध करो कि

$b \times c,\ c \times a,\ a \times b$

भी असमतलीय हैं/और a, b, c को [लखनऊ 60]

$b \times c,\ c \times a,\ a \times b$ मे अभिव्यक्त करो । [लखनऊ 57]

चूँकि a, b, c असमतलीय है

$\therefore\ [abc] \neq 0.$

तो हमे सिद्ध करना है कि

$[b \times c,\ c \times a,\ a \times b] \neq 0.$

अब $[b \times c,\ c \times a,\ a \times b] = (b \times c) \times (c \times a)\ (a \times b).$

$= \{[bca]\ c - [cca]\ b\}.\ (a \times b)$

$= [abc]\ c.\ (a \times b) = [abc]^2 \neq 0.$

चूँकि $[abc] \neq 0.$

अतः $b \times c,\ c \times a,\ a \times b$ असमतलीय हैं । हम किसी सदिश को इन मे अभिव्यक्त कर सकते हैं ।

माना $a = l\,(b \times c) + m\,(c \times a) + n\,(a \times b)$ ....(1)

दोनो ओर क्रमिक a, b, c से गुणा करने पर

$a.a = l[abc]$, या $l = \dfrac{a\,a}{[abc]}$. (2)

$a.b = m\,[abc]$, या $m = \dfrac{a.b}{[abc]}$.

$a.c = n\,[abc]$, या $n = \dfrac{a.c}{[abc]}$.

अतः $a = \dfrac{1}{[abc]}\ \{a.a\,(b \times c) + a\,b\,(c \times a) + a\,c(a \times b)\}$ ... (3)

इसी प्रकार हम b और c का मान भी ज्ञात कर सकते है ।

(2) यदि a, b, c तीन असमतलीय-सदिश हों तो $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ को a, b, c में अभिव्यक्त करो।

माना $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=l\mathbf{a}+m\mathbf{b}+n\mathbf{c}$ ....(1)

दोनों ओर $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ का बारी-बारी से गुणा करने पर

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=l\,[\mathbf{abc}],\text{ या } l=\frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2}{[\mathbf{abc}]}.$$

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\ (\mathbf{c}\times\mathbf{a})=m\,[\mathbf{abc}],\text{ या } m=\frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\ (\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{[\mathbf{abc}]}.$$

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=n\,[\mathbf{abc}],\text{ या } n=\frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{[\mathbf{abc}]}.$$

(1) मे l, m और n का मान रखने पर

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\frac{1}{[\mathbf{abc}]}\{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2\ \mathbf{a}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\ (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\ \mathbf{b}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\ \mathbf{c}\} \quad ....(2)$$

इसी प्रकार हम $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, और $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ का मान भी ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).(\mathbf{a}\times\mathbf{d})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).(\mathbf{b}\times\mathbf{d})+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\ (\mathbf{c}\times\mathbf{d})=0$$

और निगमन करो कि

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$$
$$=\tfrac{1}{2}(\text{Cos } 2B-\text{Cos } 2A).$$

[लखनऊ 52, 55, 59, आगरा 50, 53, 60, इलाहाबाद 60, दिल्ली 61, कर्नाटक 62, बनारस 53.]

हम जानते हैं कि

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\,\mathbf{c})\ (\mathbf{b}.\mathbf{d})-(\mathbf{b}.\mathbf{c})\ (\mathbf{a}\,\mathbf{d}).$ ....(1)

$(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).(\mathbf{a}\times\mathbf{d})=(\mathbf{b}.\mathbf{a})\ (\mathbf{c}\,\mathbf{d})-(\mathbf{b}.\mathbf{d})\ (\mathbf{c}.\mathbf{a})$ ...(2)

$(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).(\mathbf{b}\times\mathbf{d})=(\mathbf{c}.\mathbf{b})\ (\mathbf{a}.\mathbf{d})-(\mathbf{c}.\mathbf{d})\ (\mathbf{a}\,\mathbf{b}).$ ....(3)

$(1)+(2)+(3)=0.$

$$\therefore\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\,(\mathbf{c}\times\mathbf{d})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).\,(\mathbf{a}\times\mathbf{d})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).\,(\mathbf{b}\times\mathbf{d})=0. \quad ....(4)$$

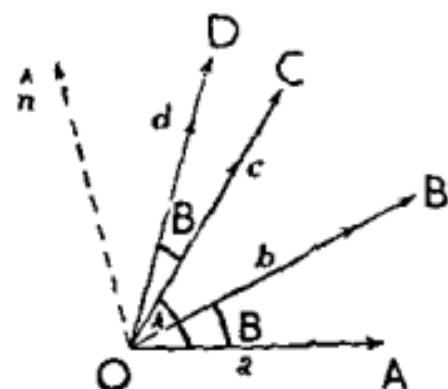
माना चार समतलीय-बिन्दु A, B, C, D हैं। और उनके स्थिति-सदिश मूल-बिन्दु O के सापेक्ष क्रमश: **a**, **b**, **c**, **d** हैं। और

$$\angle AOC=A,\ \angle COD=\angle AOB=B \quad ..(5)$$

मान $\hat{\mathbf{n}}$, समतल पर इकाई-सदिश है।

तब $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\ (\mathbf{a}\times\mathbf{d})=$

$[bc \sin (A-B)\hat{\mathbf{n}}]$.

$[ad \sin (A+B)\hat{\mathbf{n}}]$

$$=abcd \sin (A+B) \sin (A-B) \quad ....(6)$$

इसी प्रकार

$(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\ (\mathbf{b}\times\mathbf{d})=\ -abcd \sin (A) \sin (A)$.

और $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\ (\mathbf{c}\times\mathbf{d})=abcd \sin B \sin B \quad ....(8)$

(4), (6), (7) और (8) से

$\sin (A+B) \sin (A-B)-\sin^2 A+\sin^2 B=0.$

या $\sin (A+B) \sin (A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B.$

2. सिद्ध करो कि

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\ \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ और $\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ समतलीय हैं।

[राज० 58, 70]

माना $\vec{\mathbf{p}}=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\ \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad ....(1)$

$\vec{\mathbf{q}}=\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(\mathbf{b}\ \mathbf{a})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\ \mathbf{c})\mathbf{a} \quad ....(2)$

$\vec{\mathbf{r}}=\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{c}\ \mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{c}.\mathbf{a})\mathbf{b} \quad ...(3)$

$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ समतलीय हैं यदि $[\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}]=0$.

या $\vec{p}.(\vec{q}\times\vec{r})=0$.

अब $\vec{q}\cdot\vec{r}=[(b.a)\ c-(b.c)\ a]=[(c.b)\ a-(c.a)b]$.

$=(b.a)\ (c.b)\ (c\times a)-(b.a)\ (c.a)\ (c\times b)+(b.c)\ (c.a)\ (a\times b)$

$\vec{p}.\vec{q}\times\vec{r}=(a.b)\ (b.c)\ (c.a)\ [abc]+$ ....शेष सब पद शून्य हैं क्योंकि $[bbc]=0=[abb]$

परन्तु $[abc]=0$.

$\therefore [\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}]=0$ इसलिए $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ समतलीय हैं।

3 सिद्ध करो कि

$a\times\{b\times(c\times d)\}=(b.d)\ (a\times c)-(b.c)\ (a\times d)$.

[दिल्ली 51, आगरा 55, पंजाब 59]

अत: विस्तार करो

$a\times[b\times\{c\times(d\times e)\}]$.

हल. $b\times(c\times d)=(b.d)\ c-(b.c)\ d$. .. (1)

दोनों ओर a की सदिश-गुणा करने पर

$a\times\{b\times(c\times d)\}=(b.d)\ (a\times c)-(b.c)\ (a\times d)$. ....(2)

अत: $b\times\{c\times(d\times e)\}=(c.e)\ (b\times d)-(c.d)\ (b\times e)$ .. (5)

(5) में दोनों ओर a से सदिश-गुणा करने पर

$a\times[b\times\{c\times(d\times e)\}]=(c.e)\ \{a\times(b\times d)\}-c.d\ \ a\times(b\times e)$.

$=(c.e)\ \{(a.d)\ b-(a.b)d\}-(c.d)\ \{(a.e)b-(a.b)\ e\}$

4. समीकरण हल करो

$\vec{x}\times a=b$. $(a.b)\neq 0$

सदिश a, b, और $a\times b$ असमतलीय हैं क्योंकि $(a\times b)$ दोनों सदिशों, a और b पर लम्ब है इसलिए $\vec{x}$ को इनके एक-घात सम्बन्ध में अभिव्यक्त कर सकते हैं।

माना $\vec{x} = l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. .. (1)

दोनो ओर **a** से सदिश–गुणा करने पर और

$\vec{x}\times\mathbf{a} = \mathbf{b}$ .. (2)

मे $\vec{x}$ का मान रखने से

$\{l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\}\times\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

या $m\,(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) + n\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

या $m\,(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) + n\,(\mathbf{a}.\mathbf{a})\mathbf{b} - n\,(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{a} = \mathbf{b}$. (3)

दोनों ओर **a**,**b** और $(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ के गुणाको की तुलना करने मे

$m = 0,\ n\,(\mathbf{a}.\mathbf{a}) = 1,\ n\,(\mathbf{a}.\mathbf{b}) = 0.$

$$n = \frac{1}{\mathbf{a}\,\mathbf{a}},\ m = 0. \quad ....(4)$$

(1) मे मान रखने पर

$$\vec{x} = l\mathbf{a} + \frac{1}{\mathbf{a}\,\mathbf{a}}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \quad ....(5)$$

5. युगपत् समीकरण को हल करो

$p\,\vec{x} + q\,\vec{y} = \mathbf{a}$ ....(1)

$\vec{x}\times\vec{y} = \mathbf{b}.$ ....(2)

समीकरण (1) को $\vec{x}$ का सदिश-गुणा करो। तो

$q\,\vec{x}\times\vec{y} = \vec{x}\times\mathbf{a}.$ ....(3)

(2) और (3) से

$\vec{x}\times\mathbf{a} = q\mathbf{b}.$ ... (4)

समीकरण (4) तो ऊपर उदाहरण (4) मे हल कर चुके हैं। अत

$$\vec{x} = l\mathbf{a} + \frac{q\,(\mathbf{a}\times\mathbf{q})}{\mathbf{a}\,\mathbf{a}}. \quad . (5)$$

(1) मे मान रखने पर

$$q\,\vec{y} = \mathbf{a} - p\,\{l\mathbf{a} + q\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{a}\,\mathbf{a}}\}.$$

या $$\vec{y} = \frac{1}{q}(1-pl)\,\mathbf{a} - p\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{a}^2} \qquad \text{....(6)}$$

प्रश्नावली 10

1. सरल करो

(i) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\ (\mathbf{c}\times\mathbf{d})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\ (\mathbf{d}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{d})\ (\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

(ii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{d}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{d})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

[आन्ध्र 63]

2. सिद्ध करो कि

$[\mathbf{a}\times\mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{c},\ \mathbf{d}]=(\mathbf{a}.\mathbf{d})\ [\mathbf{abc}]$. [लखनऊ 59]

3. एक ऐसे सदिशों का सेट ज्ञात करो जो निम्न सदिशों के व्युत्क्रम हों

$2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k},\ \mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k},\ -\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

4. सिद्ध करो कि $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=[\mathbf{abc}]\ \mathbf{c}$.

और इससे निगमन करो (deduce) कि [आगरा 41]

$[\mathbf{b}\times\mathbf{c},\ \mathbf{c}\times\mathbf{a},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}]=[\mathbf{abc}]^2$.

(आन्ध्र 53, बनारस 56, आगरा 58, राज० 63, पंजाब 60)

5. सिद्ध करो कि

$[\mathbf{a}\times\mathbf{p},\ \mathbf{b}\times\mathbf{q},\ \mathbf{c}\times\mathbf{r}]+[\mathbf{a}\times\mathbf{q},\ \mathbf{b}\times\mathbf{r},\ \mathbf{c}\times\mathbf{p}]+[\mathbf{a}\times\mathbf{r},\ \mathbf{b}\times\mathbf{p},\ \mathbf{c}\times\mathbf{q}]=0$. [लखनऊ 55, बिहार 62]

[संकेत पहले कोष्ठ को X. (YxZ), दूसरे को Y. (Z × X) और तीसरे को Z. (X × Y) मान कर विस्तार करो और जोड़ दो]

6. सिद्ध करो कि

$[\mathbf{a}\times\mathbf{b},\ \mathbf{c}\times\mathbf{d},\ \mathbf{e}\times\mathbf{f}]=[\mathbf{abd}]\ [\mathbf{cef}]-[\mathbf{abc}]\ [\mathbf{def}]$.

$=[\mathbf{abe}]\ [\mathbf{fcd}]-[\mathbf{abf}]\ [\mathbf{ecd}]$.

$=[\mathbf{cda}]\ [\mathbf{bef}]-[\mathbf{cdb}]\ [\mathbf{aef}]$.

(आगरा 56, 60, 61, 66)

7. यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ और $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ क्रमश परस्पर व्युत्क्रम हो तो सिद्ध करो कि

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{a}' + \mathbf{b} \times \mathbf{b}' + \mathbf{c} \times \mathbf{c}' = 0.$

(ii) $\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' + \mathbf{b}' \times \mathbf{c}' + \mathbf{c}' \times \mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{[\mathbf{abc}]}$

(iii) $\mathbf{a}\,\mathbf{a}' + \mathbf{b}\,\mathbf{b}' + \mathbf{c}\,\mathbf{c}' = 3.$

8. यदि चार सदिशों का योग शून्य हो तो सिद्ध करो कि प्रत्येक सदिश दूसरे तीनों सदिशों की दिशाओं में इकाई सदिशों के अदिश-त्रिक-गुणनफल के समानुपाती होता है। (रेनकिन का प्रमेय)

(बनारस 55, बिहार 61)

[संकेत $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{d}}$ इकाई सदिश लो तो

$a\hat{\mathbf{a}} + b\,\hat{\mathbf{b}} + c\,\hat{\mathbf{c}} + d\,\hat{\mathbf{d}} = 0.$

$\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, और $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ इत्यादि से गुणा करो ...]

9. सिद्ध करो कि यदि $[\mathbf{abc}] \neq 0$, तो

$$(\mathbf{r}\,\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b}) - (\mathbf{r}.\mathbf{b})\,(\mathbf{c}.\mathbf{a}) = \frac{[\mathbf{rca}]}{[\mathbf{abc}]}\{(\mathbf{c}.\mathbf{b})\,(\mathbf{a}.\mathbf{b}) - (\mathbf{c}.\mathbf{a})\,(\mathbf{b}.\mathbf{b})\}$$

$$- \frac{[\mathbf{rab}]}{[\mathbf{abc}]}\{(\mathbf{a}\,\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\,\mathbf{c}) - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\,\mathbf{c})\}$$

[बनारस 62]

10. यदि चार सदिश $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ समतलीय हो तो सिद्ध करो कि $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = 0.$

11. युगपत् समीकरण हल करो

$\mathbf{r} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$

और $\mathbf{r}\,\mathbf{c} = 0.$

दिया हुआ है कि $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ पर लम्ब नहीं है।

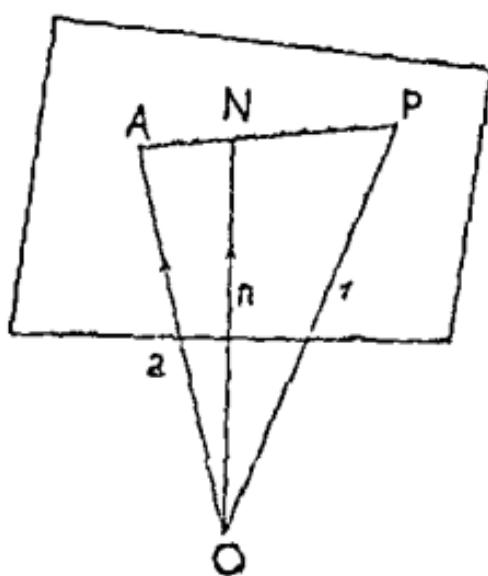
[संकेत पहले समीकरण को $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ लिखो ..]

6
ज्यामितीय अनुप्रयोग

6.1 परिचय:

हम अध्याय 3 में सरल-रेखा और समतल के समीकरणों का विवरण कर चुके हैं इस अध्याय में हम सरल रेखा, समतल और गोले के समीकरणों का दूसरा रूप बताएंगे और कुछ समस्याओं पर विस्तारपूर्वक विचार करेंगे।

6.2 समतल का समीकरण अभिलम्ब रूप में। (*Equation of the* **plane in normal form.**)

6.2 (1) उस समतल का समीकरण ज्ञात करना जो बिन्दु A में से गुजरे और सदिश n पर लम्ब हो।

माना मूल-बिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु A का स्थिति-सदिश **a** है और समतल पर किसी बिन्दु P का स्थिति-सदिश **r** है।

माना θ अभिलम्ब $\overrightarrow{ON} = \mathbf{n}$,

तो $\overrightarrow{AP} = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ .. (1)

और चूँकि $\overrightarrow{AP}$, $\mathbf{n}$ पर लम्ब है

$\therefore (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0$ ....(2)

जोकि समतल का अभीष्ट समीकरण है।

समीकरण (2) को हम निम्न विधि मे भी लिख सकते हैं।

$(\mathbf{r} - \mathbf{a}) . \hat{\mathbf{n}} = 0.$

या $\mathbf{r}.\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a}.\hat{\mathbf{n}}$ (3)

परन्तु $\mathbf{a}.\hat{\mathbf{n}}$ सदिश का $\overrightarrow{ON}$ की दिशा मे प्रक्षेप है।

माना $\mathbf{a}\,\hat{\mathbf{n}} = p$ .. (4)

तो (3) और (4) से समतल का समीकरण है

$\mathbf{r}.\,\hat{\mathbf{n}} = p$ ....(5)

यह समतल का अभिलम्ब रूपी समीकरण है।

व्यापक रूप मे यदि $\mathbf{r}\,\mathbf{n} = q$ हो तो यह उस समतल का समीकरण है जो मूलबिन्दु मे से गुजरता है और सदिश n पर लम्ब है। और इस पर मूल-बिन्दु से लम्ब $q/\mathbf{n}$ है।

विशेष स्थिति में यदि समतल मूल-बिन्दु मे से गुजरे तो उसका समीकरण

$\mathbf{r}.\mathbf{n} = 0$ ...(6)

6 2 (2) *ऐसे समतल का समीकरण ज्ञात करना जो सदिश* $\mathbf{b}$ *और* $\mathbf{c}$ *के समान्तर हो और बिन्दु* $\mathbf{a}$ *में से गुजरे।*

चूँकि समतल $\mathbf{b}$ और $\mathbf{c}$ के समान्तर है इसलिए $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ इस पर लम्ब होगा

$\therefore$ ऊपर समीकरण (2) से इसका समीकरण

$(\mathbf{r}-\mathbf{a}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0.$ ....(1)

या $[\mathbf{rbc}]=[\mathbf{abc}].$ ...(2)

6 3 (3) तीन बिन्दु a, b, c (असमरेखा) में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करना।

चूँकि समतल a, b, c में से हो कर जाता है इसलिए वह $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ और $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ के समान्तर है। अतः इसका समीकरण

$(\mathbf{r}-\mathbf{a}).\{(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})\}=0.$ है। ...(1)

या $(\mathbf{r}-\mathbf{a}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0.$ ....(2)

उपप्रमेय . प्रतिबन्ध, कि चार बिन्दु a, b, c, d समतलीय हो।

हल. *a*, *b*, c में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$\mathbf{r}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{a}\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})$

यदि बिन्दु d इस पर स्थित है तो $=[\mathbf{abc}]$ (3)

$\mathbf{d}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})\quad=[\mathbf{abc}].$

या $[\mathbf{abc}]+[\mathbf{acd}]-[\mathbf{dbc}]-[\mathbf{dab}].=0$ ....(4)

6.2(4) उस समतल का समीकरण ज्ञात करना जो दो बिन्दुओं a और b में से होकर जाय और दी हुई रेखा के समान्तर हो।

माना c सदिश दी हुई रेखा के समान्तर है। तो, चूँकि a, और b उस समतल पर स्थित हैं तो समतल $(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ के भी समान्तर होगा।

∴ (6.3) अनुच्छेद के अनुसार समतल का समीकरण

$(\mathbf{r}-\mathbf{a}).\ \{\mathbf{a}-\mathbf{b}\times\mathbf{c}\}=0.$

या $\mathbf{r}.(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}.(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{c}$

या $\mathbf{r}.(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{c}=[\mathbf{acb}].$ ...(1)

6.25 एक दी हुई सरल रेखा और एक बिन्दु में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करना।

माना दी हुई सरल-रेखा का समीकरण

$\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ है। ...(1)

सरल-रेखा (1) और बिन्दु c में से गुजरने वाला समतल बिन्दु a और

c में से होकर जाएगा और सदिश b के समान्तर होगा अतः (6.25) के अनुसार इसका समीकरण

$$\mathbf{r}.\ (\mathbf{a}-\mathbf{c})\times\mathbf{b}=[\mathbf{abc}] \qquad ....(1)$$

6.3 समतल के इन समीकरणों के कार्तीय तुल्य (Cartesion equivalents of the equations of the plane)

(1) अनुच्छेद 6.2 में यदि A और P के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) और (x, y, z) है और $\vec{n}=n_1\ \mathbf{i}+n_2\mathbf{j}+n_3\ \mathbf{k}$ तो

$$\vec{AP}=(x-x_1)\ \mathbf{i}+(y-y_1)\ \mathbf{j}+(z-z_1)\mathbf{k}. \qquad ... (1)$$

(i, j, k अक्षों की दिशाओं में इकाई सदिश हैं।)

तो $\vec{AP}.\ \vec{n}=0.$

या $\{(x-x_1)\ \mathbf{i}+(y-y_1)\ \mathbf{j}+(z-z_1)\mathbf{k}\}.\ (n_1\mathbf{i}+n_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k})=0.$

या $n_1\ (x-x_1)+n_2\ (y-y_1)+n_3\ (z-z_3)=0. \qquad ....(2)$

या $n_1\ x+n_2\ y+n_3\ z=(n_1\ x_1+n_2\ y_1+n_3\ z_1)$

और यदि इकाई सदिश $\hat{n}$ के दिक्कोज्या (direction cosine) (l,m,n) हैं और ON$=p$ तो समतल का समीकरण 6.25 से

$(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}).\ (l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k})=p.$

या $lx+my+nz=p. \qquad ....(3)$

(2) इसी प्रकार हम तीन बिन्दुओं में से हो कर जाने वाले समतल का समीकरण (देखो 6.24) कार्तीय निर्देशांको में निकाल सकते हैं।

माना तीन बिन्दु

$\mathbf{a}=(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})$, $\mathbf{b}=(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})$, और

$\mathbf{c}=(c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k})$ हैं। तो

माना $\vec{d}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}. \qquad ... (4)$

और यदि P (x, y, z) समतल पर कोई बिन्दु है और $\vec{OP}=$ $\mathbf{r}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$ है।

तो $\mathbf{d}.(\mathbf{r}-\mathbf{a})=0$ ....(5)

(4) में a, b, c का मान रखने पर

$$\mathbf{d}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \quad ....(6)$$

(5) और (6) से

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

या $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

इसी प्रकार से हम दूसरे समीकरणों का भी कार्तीय तुल्य ज्ञात कर सकते हैं।

6.4 दो समतलों के बीच का कोण। (angle between the two planes)

माना $\mathbf{r}.\vec{\mathbf{n}}_1=p$ और $\mathbf{r}.\vec{\mathbf{n}}_2=q$ दो समतल हैं। तो इन दोनों के बीच का कोण इनके अभिलम्बों के बीच के कोण के बराबर है अर्थात् $\vec{\mathbf{n}}_1$ और $\vec{\mathbf{n}}_2$ के बीच का कोण

माना $\vec{\mathbf{n}}_1$ और $\vec{\mathbf{n}}_2$ के बीच का कोण θ है तो

$$\vec{\mathbf{n}}_1 . \vec{\mathbf{n}}_2=|\vec{\mathbf{n}}_1||\vec{\mathbf{n}}_2| \operatorname{Cos} \theta$$

$$\text{या } \theta=\operatorname{Cos}^{-1}\frac{\vec{\mathbf{n}}_1 . \vec{\mathbf{n}}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} \quad ....(1)$$

6.5 अक्षों पर अंतः खंड ज्ञात करना (To find the intercepts on the Coordinate axes)

माना समतल का समीकरण

$\mathbf{r}.\mathbf{n}=p$ ....(1)

और x, y, z अक्षो पर अंतः खड क्रमशः a, b, और c हैं और i, j,k अक्षो की दिशाओं में इकाई सदिश हैं। तब तीन बिन्दु $a\mathbf{i}$, $b\mathbf{j}$ और $c\mathbf{k}$ समीकरण (1) को संतुष्ट करते हैं।

$\therefore\ a\mathbf{i}.\mathbf{n}=p$

या $a = \dfrac{p}{\mathbf{i}\,\mathbf{n}}$ ....(2)

इसी प्रकार $b=\dfrac{p}{\mathbf{j}\,\mathbf{n}}$ ... (3)

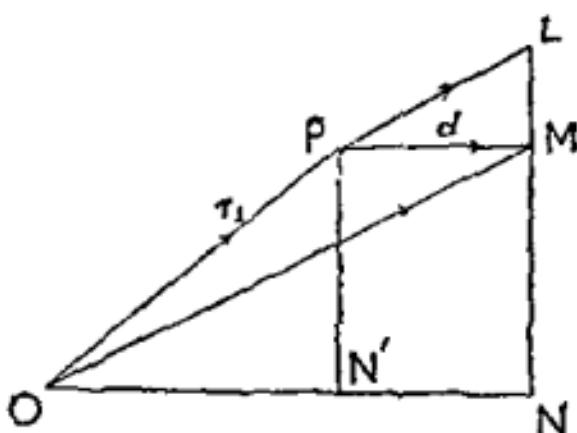
और $c=p/\mathbf{k}.\mathbf{n}$ ... (4)

6.6 किसी बिन्दु की समतल से दूरी। (Distance of a point from the plane)

माना समतल का समीकरण

$\mathbf{r}\ \hat{\mathbf{n}}=p.$ ....(1)

और P दिया हुआ बिन्दु है जिसका मूल-बिन्दु के सापेक्ष स्थिति-सदिश $\mathbf{r}_1$ है।

P मे से दिए हुए समतल के समान्तर समतल खीचो।

माना O से इस समतल पर लम्ब $p_1=ON_1$ है तो इस समतल का समीकरण है।

$\mathbf{r}.\hat{\mathbf{n}}=p_1$. है .. (2)

परन्तु बिन्दु P_1 इस पर स्थित है ।

$$\therefore \mathbf{r}_1.\hat{\mathbf{n}} = p_1. \qquad ....(3)$$

दोनों समतलों के बीच की दूरी $= PM = N_1 N$.

या P से समतल की दूरी

$$d = p - p_1 = p - \mathbf{r}_1 \hat{\mathbf{n}} \qquad ....(4)$$

अर्थात् समतल के अभिलम्ब रूपी समीकरण में यदि $\mathbf{r}$ के स्थान पर बिन्दु का स्थिति-सदिश $\mathbf{r}_1$ रखा जाय तो वह उस बिन्दु की समतल से दूरी होगी ।

PM धन है यदि P समतल के उस ओर पड़ता है जिस ओर मूल-बिन्दु है और PM ऋण है यदि मूल-बिन्दु O और P समतल से विपरीत दिशाओं में हैं ।

अभिलम्ब-पाद M का स्थिति-सदिश ज्ञात करने के लिए

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}$$

$$= \mathbf{r}_1 + d.\hat{\mathbf{n}}$$

$$= \mathbf{r}_1 + (p - \mathbf{r}_1.\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \qquad ....(5)$$

उपप्रमेय: बिन्दु P ($= \mathbf{r}_1$) की समतल से दी हुई दिशा में दूरी ज्ञात करना ।

माना दी हुई दिशा में इकाई सदिश $\hat{\mathbf{b}}$ है ।

$$\text{तो वाञ्छनीय दूरी } PL = x\hat{\mathbf{b}}. \qquad ....(6)$$

$$\text{और } \vec{OL} = \vec{OP} + \vec{PL}.$$

$$= \mathbf{r}_1 + x\hat{\mathbf{b}}.$$

परन्तु L समतल (1) पर स्थित है

$$\therefore (\mathbf{r}_1 + x\hat{\mathbf{b}}).\hat{\mathbf{n}} = p.$$

या $x = \dfrac{p - \mathbf{r}_1 . \hat{\mathbf{n}}}{\hat{\mathbf{b}} \hat{\mathbf{n}}}$ ... (7)

6.7 दो समतलों को बीच के कोण को समद्विभाग करने वाले समतलों के समीकरण ज्ञात करना । (To find the equation of the planes which bisect the angles between the two planes)

माना $\mathbf{r}.\hat{\mathbf{n}}_1 = p_1$. ....(1)

और $\mathbf{r}.\hat{\mathbf{n}}2 = p_2$. ... (2)

दो समतलों के समीकरण हैं ।

कोई बिन्दु $\mathbf{r}_1$, जोकि (1) और (2) के बीच के कोण के सद्विभाजक समतल पर स्थित है, वह (1) और (2) से समान दूरी पर है ।

$\therefore \; p_1 - \mathbf{r}_1 \hat{\mathbf{n}}_1 = \pm (p_2 - \mathbf{r}_1 \; \hat{\mathbf{n}}_2).$

यदि समद्विभाजक उस कोण का है जिसमे मूल-बिन्दु है । तो दोनों ओर चिह्न एक सा होगा । और जिस कोण मे मूल-बिन्दु न हो उस कोण के समद्विभाजक के लिए चिह्न विपरीत होंगे ।

अतः दोनो समद्विभाजको के समीकरण

$p_1 - \mathbf{r}_1 \hat{\mathbf{n}}_1 = (p_2 - \mathbf{r}_1 . \hat{\mathbf{n}}_2)$

या $p_1 - p_2 = \mathbf{r}_1 . (\hat{\mathbf{n}}_1 - \hat{\mathbf{n}}_2)$ ....(3)

और $p_1 + p_2 = \mathbf{r}_1 . (\hat{\mathbf{n}}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2)$ ....(4)

दोनों समद्विभाजक एक-दूसरे पर लम्ब हैं क्योंकि

$(\hat{\mathbf{n}}_1 - \hat{\mathbf{n}}_2).(\hat{\mathbf{n}}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2) = \hat{\mathbf{n}}_1^2 - \hat{\mathbf{n}}_2^2 = 1 - 1 = 0$ ....(5)

6.8 दो समतलों की प्रतिच्छेद-रेखा में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण । (Plane containing the line of intersection of two planes.)

माना $\mathbf{r}.\hat{\mathbf{n}}_1 = p_1$, ...(1)

और $\mathbf{r}.\hat{\mathbf{n}}_2 = p_2$, ...(2)

दो समतलों के समीकरण हैं। तो समीकरण

$$(\mathbf{r}.\hat{\mathbf{n}}_1 - p_1) + \lambda(\mathbf{r}.\hat{\mathbf{n}}_2 - p_2) = 0.$$

या $\mathbf{r}.(\hat{\mathbf{n}}_1 + \lambda\hat{\mathbf{n}}_2) = p_1 + \lambda p_2$. ....(3)

जबकि λ एक अदिश-राशि है, एक समतल का समीकरण है।

समीकरण (3) उन सब बिन्दुओ से संतुष्ट होता है जो दोनों समतलों मे उभयनिष्ठ है। और यह सदिश $\mathbf{n}_1 + \lambda\mathbf{n}_2$ पर अभिलम्ब है।

6.9 सरल-रेखा का समीकरण। (equation of a st. line.)

(i) उस सरल-रेखा का समीकरण ज्ञात करना जोकि सदिश **b** के समान्तर हो और बिन्दु A ($=\mathbf{a}$) में से होकर जाय।

माना सरल रेखा पर कोई बिन्दु P है। और P का मूलबिन्दु O के सापेक्ष स्थिति-सदिश **r** है। बिन्दु A का स्थिति-सदिश

$$= \overrightarrow{OA} = \mathbf{a}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AP} = (\mathbf{r} - \mathbf{a}). \quad ....(2)$$

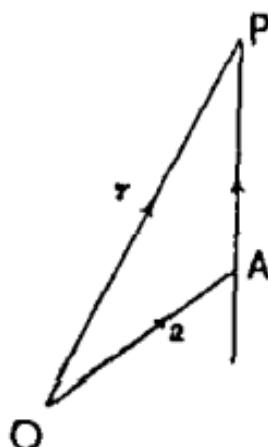
किन्तु $\overrightarrow{AP}$ सदिश **b** के समान्तर है।

$$\therefore (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0. \quad ....(3)$$

समीकरण (3) सरल-रेखा का अभीष्ट समीकरण है। विशेष स्थिति में यदि $\mathbf{a} = 0$, तो

$$\mathbf{r} \times \mathbf{b} = 0. \quad ....(4)$$

(4) उस सरल रेखा का समीकरण है जो सदिश **b** के समान्तर है और मूलबिन्दु से गुजरती है।

(ii) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जो बिन्दु **a** में से

गुजरती है और दो दिए हुए सदिशो b और c पर लम्ब हो

यह स्पष्ट है कि वह सरल-रेखा $b \times c$ के समान्तर होगी। अत उसका समीकरण है।

$$(r-a) \times (b \times c) = 0. \quad ...(5)$$

$$\text{या } r \times b \times c = a \times b \times c \quad ....(6)$$

6.10 बिन्दु P की, दी हुई सरल-रेखा $r = a + tb$. (जबकि b इकाई सदिश है) से लम्बवत दूरी ज्ञात करना। (To find the perpendicular distance of a point from the given st line)

दी हुई रेखा बिन्दु a मे से गुजरती है।

माना P का, किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष स्थिति-सदिश r_1 है और PM सरल-रेखा पर P से लम्ब है। तो

$$\overrightarrow{PA} = a - r_1. \quad ....(1)$$

$$PM^2 = PA^2 - AM^2.$$

$$= (a - r_1)^2 - \{(a - r_1)\ b\}^2. \quad ...(2)$$

∵ MA $(a - r_1)$ का b की दिशा मे प्रक्षेप है।

समीकरण (2) से PM की लम्बाई p प्राप्त है।

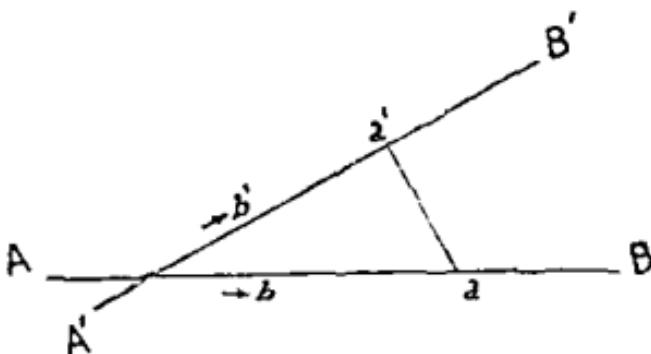
सदिश के रूप मे

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{MA}.$$

$$= (a - r_1) - b.\ (a - r_1)b. \quad ....(3)$$

इसका मापाक p है।

6.11 दो सरल-रेखाओं के प्रतिच्छेदन करने का प्रतिबन्ध या दो सरल-रेखाओं के समतलीय होने का प्रतिबन्ध। **(Condition for intersection of two straight lines or condition for coplanarity of two lines)**

माना AB और A′ B′ दो सरल रेखाएं हैं जिनके समीकरण क्रमशः

$$r = a + tb. \qquad ....(1)$$

$$r = a' + tb'. \qquad ....(2)$$

है। और वे a व a′

बिन्दुओं से क्रमशः गुजरती हैं। और b व b′ के समान्तर हैं।

यदि यह रेखाएं एक-दूसरे को काटती हैं तो वह एक हो समतल में स्थित होंगी जो b, b,′ और a − a′ के समान्तर है। परन्तु b, b,′ और (a − a′) समतलीय होंगे यदि

$$[b, b', a - a'] = 0. \qquad ...(3)$$

या $[abb'] = [a'bb]$. .. (4)

इन रेखाओं में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$(r - a).(b \times b') = 0.$

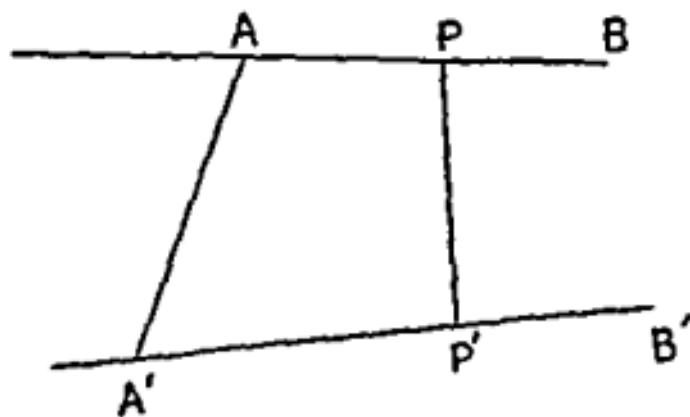
या $[rbb'] = [abb']$. .. (5)

6.12 दो अप्रतिच्छेदी सरल-रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी। **(Shortest distance between two non-intersecting lines)**

माना दो सरल-रेखाएं AB और A′B′ क्रमशः

$$r = a + tb. \qquad .. (1)$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}'+t\mathbf{b}'. \quad ....(2)$$

हैं। (1) बिन्दु A $(=\mathbf{a})$ में से गुजरती है और $\mathbf{b}$ के समान्तर है और (2) बिन्दु A′ $(=\mathbf{a}')$ में से होकर जाती है और $\mathbf{b}'$ के समान्तर है।

$$\overrightarrow{A'A}=\mathbf{a}-\mathbf{a}'. \quad ....(3)$$

माना PP′ न्यूनतम-दूरी है, तो PP′, AB तथा A′ B′ दोनों पर लम्ब है। अतः यह $\mathbf{b}\times\mathbf{b}'$ के समान्तर है।

PP′, AA′ का $\mathbf{b}\times\mathbf{b}'$ पर प्रक्षेप है। अतः

$$PP'=\frac{(\mathbf{a}-\mathbf{a}').(\mathbf{b}\times\mathbf{b}')}{|\mathbf{b}\times\mathbf{b}'|}.$$

$$=\frac{1}{|\mathbf{b}\times\mathbf{b}'|}[\mathbf{b},\mathbf{b}',\mathbf{a}-\mathbf{a}']. \quad ....(4)$$

नोट : यदि दोनों रेखाएँ समतलीय हों तो $PP'=0$.

या $[\mathbf{b},\mathbf{b}',\mathbf{a}-\mathbf{a}]=0$.

PP′ का समीकरण ज्ञात करना :—

माना PP′ पर कोई बिन्दु $\mathbf{r}$ है। तो $(\mathbf{r}-\mathbf{a})$, और $\mathbf{b}\times\mathbf{b}'$ समतलीय हैं। अतः AP और PP′ में से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$[\mathbf{r}-\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{b}']=0. \text{ है} \quad ....(5)$$

इसी प्रकार A′ P′ और PP′ में से हो कर जाने वाले समतल का समीकरण है

$$[\mathbf{r}-\mathbf{a}',\mathbf{b}',\mathbf{b}\times\mathbf{b}']=0. \quad ....(6)$$

(5) और (6) की प्रतिच्छेदन–रेखा PP′ है ।

उपप्रमेय–यदि हम PP′ के मध्य बिन्दु को मूल-बिन्दु लें तो हम AB और A′ B′ के समीकरण निम्न रूप से लिख सकते हैं ।

$\mathbf{r}=\mathbf{c}+t\mathbf{b}$.

और $\mathbf{r}=c+s\mathbf{b}'$

जबकि $\mathbf{c}=\frac{1}{2}\overrightarrow{P'P}$.

उदाहरण 1.

तीन बिन्दुओ A (2, 3, −1), B (4, 5, −2) और C (3, 6, 5) मे से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करो ।

माना P (x, y, z) समतल पर कोई बिन्दु है । तो

सदिश $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$, और $\overrightarrow{AC}$ समतलीय हैं । अर्थात्

$(x-2, y-3, z+1)$, (2, 2, 3) और (1, 3, 6) समतलीय-सदिश हैं । इसलिए

$$[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]=0$$

$$\text{या} \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

या $3(x-2)-9(y-3)+4(z+1)=0$.

या $3x-9y+4z+25=0$.

उदाहरण 2.

सिद्ध करो कि बिन्दु $(\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ और $(3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k})$.

समतल $\mathbf{r}.(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})+9=0$. से समान दूरी पर हैं और विपरीत ओर स्थित हैं । [कलकत्ता 62, आगरा 59]

समतल का समीकरण $\mathbf{r}.\mathbf{n}=p$. है ... (1)

या $\mathbf{r}.(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})=-9$.

$$\text{इकाई सदिश } \hat{\mathbf{n}}=\frac{5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k}}{\sqrt{78}}.$$

अतः समीकरण (1) को निम्न विधि से लिखा जा सकता है।

$$\mathbf{r}.\frac{(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})}{\sqrt{78}}=\frac{-9}{\sqrt{78}}=p. \qquad ....(2)$$

विन्दु $(\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ के लिए

$$p_1=\mathbf{r}_1.\hat{\mathbf{n}}=(\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}).\frac{(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})}{\sqrt{78}}$$

$$=\frac{5-2-21}{\sqrt{78}}=\frac{-18}{\sqrt{78}}. \qquad ....(3)$$

अतः विन्दु $(\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ की समतल से दूरी

$$=p_1-p=\frac{-18}{\sqrt{78}}+\frac{9}{\sqrt{78}}=\frac{-9}{\sqrt{78}} \qquad ...(4)$$

इसी प्रकार विन्दु $(3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ के लिए

$$p_2=\mathbf{r}_2.\hat{\mathbf{n}}=(3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}).\frac{(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})}{\sqrt{78}}$$

$$=\frac{15+6-21}{\sqrt{78}}=0. \qquad ...(5)$$

$\therefore$ बिन्दु $(3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ की समतल से दूरी

$$=p_2-p=0+\frac{9}{\sqrt{78}}=\frac{9}{\sqrt{78}}. \qquad ....(6)$$

(5) और (6) से स्पष्ट है कि दोनो बिन्दु समतल से समान दूरी पर हैं और समतल की विपरीत दिशाओं मे हैं।

उदाहरण 3.

समतल $\mathbf{r}.(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$, और $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})=2$.

की प्रतिच्छेद-रेखा ज्ञात करो।

(आगरा एम. एससी 45)

दोनो समतलो की प्रतिच्छेद-रेखा उनके अभिलम्बों $\mathbf{n}_1$ $\mathbf{n}_2$ या $(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$ और $(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})$ पर लम्ब होगी। अतः वह $(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})$ के समान्तर होगी।

या $-2i+7j+13k$ के समान्तर है।

माना मूल-बिन्दु O से A $(=a)$ इस रेखा पर लम्ब-पाद है। तो इसका समीकरण होगा

$$(r-a)\times(-2i+7j+13k)=0 \quad ....(1)$$

और $\overrightarrow{OA}$, n_1 n_2 के समतल के समान्तर होगा इसलिए हम

$\overrightarrow{OA}=a$ को n_1 और n_2 के एकघात-सम्बन्ध मे अभिव्यक्त कर सकते हैं।

$$\therefore \overrightarrow{OA}=a=ln_1+mn_1.$$
$$=l(3i-j+k)+m(i+4j-2i) \quad ..(2)$$

जबकि l, m अदिश हैं।

चूँकि A दोनों समतलों पर स्थित है

$\therefore (ln_1+mn_2).\, n_1=1.$

और $(ln_1+mn_2)\; n_2=2$

या $\{l\,(3i-j+k)+m\,(i+4j-2k)\}.\,(3i-j+k)=1.$

या $11l-3m=1.$ ....(3)

और $\{l\,(3i-j+k)+m\,(i+4j-2k).\;(i+4j-2k)=2.$

या $-3l+21m=2$ ....(4)

(3) और (4) से

$$l=\frac{27}{222},\ m=\frac{25}{222} \quad ....(5)$$

इसलिए सरल-रेखा का समीकरण है

$$r.=\frac{27}{222}(3i-j+k)+\frac{25}{222}(i+4j-2k)+t(-2i+7j+13k).$$

$$\text{या } r=\frac{1}{222}(106i+73j-23k)+t(-2i+7j+13k) \;...\;(6)$$

दूसरी विधि से सरल-रेखा का समीकरण ऊपर (1) से प्राप्त कर सकते

है। (1) मे a का मान रखने पर

$$\{r - \frac{1}{222}(106i + 73j - 23k)\} \times (-2i + 7j + 13k) = 0.$$

$$\text{या } r \times (-2i + 7j + 13k) = (5i - 6j + 4k). \quad \text{....(7)}$$

उदाहरण 4.

सिद्ध करो कि समतल $r.(i + 2j + 3k) = 0$, और

$r.(3i + 2j + k) = 0$. की प्रतिच्छेद-रेखा i और k की दिशाओ के साथ समान कोण बनाती है और j की दिशा के साथ $\frac{1}{2}\sec^{-1} 3$ का।

[आगरा 61]

दोनो समतलो की प्रतिच्छेद-रेखा उनके अभिलम्बो पर लम्ब होगी।

अत. $(i + 2j + 3k) \times (3i + 2j + k)$ के समान्तर होगी।

अर्थात् $(-4i + 8j - 4k)$ के समान्तर होगी।

माना यह रेखा i, j, k की दिशाओ के साथ क्रमशः कोण α, β, γ बनाती है। तो

$$\text{Cos } \alpha = i.\frac{(-4i + 8j - 4k)}{\sqrt{96}} = \frac{-4}{4\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{6}} \quad \text{... (1)}$$

$$\text{Cos } \beta = j.\frac{(-4i + 8j - 4k)}{\sqrt{96}} = \frac{8}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}. \quad \text{... (2)}$$

$$\text{Cos } \gamma = k.\frac{(-4i + 8j - 4k)}{\sqrt{96}} = \frac{-4}{4\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}. \quad \text{.. (3)}$$

(1) और (3) से स्पष्ट है कि

$\alpha = \gamma$, और (2) से

$\text{Cos } \beta = 2/\sqrt{6}$

या $\text{Cos } 2\beta = 2.\frac{4}{6} - 1 = \frac{1}{3}$.

या $\sec 2\beta = 3$

या $\beta = \frac{1}{2}\sec^{-1} 3$

उदाहरण 5.

उस सरल-रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु C में से होकर जाय और सरल-रेखाओं

$\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\mathbf{b}$.

और $\mathbf{r}=\mathbf{a}'+s\mathbf{b}'$.

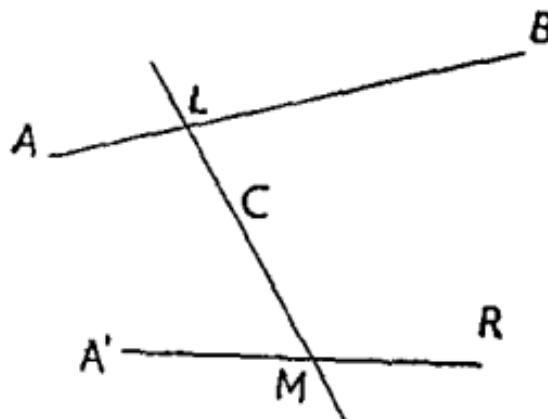
को काटे।

[आगरा 55, 61, दिल्ली 51, लखनऊ 61]

माना दी हुई रेखा

AB, $\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\mathbf{b}$

और A′ B′, $\mathbf{r}=\mathbf{a}'+s\mathbf{b}'$ है।

माना LM वाञ्छनीय सरल-रेखा है।

चूंकि यह AB को काटती है, अतः यह

$(\mathbf{a}-\mathbf{c})\times\mathbf{b}$ पर लम्ब है ....(1)

इसी प्रकार यह

$(\mathbf{a}'-\mathbf{c})\times\mathbf{b}'$ पर लम्ब है ....(2)

अर्थात् यह

$\{(\mathbf{a}-\mathbf{c})\times\mathbf{b}\}\times\{(\mathbf{a}'-\mathbf{c})\times\mathbf{b}'\}$

के समान्तर है।

अतः सरल रेखा का समीकरण है।

$(\mathbf{r}-\mathbf{c})\times[\{(\mathbf{a}-\mathbf{c})\times\mathbf{b}\}\times\{(\mathbf{a}'-\mathbf{c})\times\mathbf{b}'\}]=0.$

उदाहरण 6.

सिद्ध करो कि एक समानान्तर फलक (parallelepiped) में, जिसके किनारे a, b, c हैं, किसी विकर्ण की उसको न मिलने वाले किनारों से न्यूनतम-दूरी

$$\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}, \quad \frac{ca}{\sqrt{c^2+a^2}}, \quad \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ हैं।}$$

(आगरा 60)

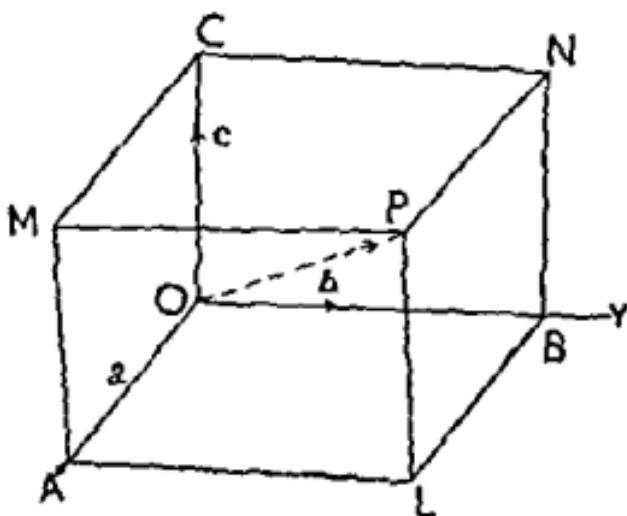
माना समानान्तरफलक OALBCMPN के किनारे $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ क्रमशः सदिश $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ अभिव्यक्त करते हैं।

विकर्ण $\vec{OP} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. ....(1)

$\vec{OP}$ का समीकरण है

$\vec{OP} = t\,(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$. ....(2)

$\vec{CM}$ का समीकरण

$\mathbf{r} = \mathbf{c} + s\mathbf{a}$. ....(3)

$\vec{OP}$ और $\vec{CM}$ के बीच में न्यूनतम-दूरी

$$=\frac{(\mathbf{c}-\mathbf{O}).\{(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a}\}}{|\mathbf{c}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})|}$$

$$=\frac{[\mathbf{cba}]}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}|}. \qquad \text{....(4)}$$

परन्तु $\mathbf{a}=a\mathbf{i}$, $\mathbf{b}=b\mathbf{j}$, $\mathbf{c}=c\mathbf{k}$.

$$\therefore \text{ न्यूनतम-दूरी}=\frac{abc}{|ab\mathbf{k}-ac\mathbf{j}|}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2}}$$

$$=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} \qquad \text{....(5)}$$

इसी प्रकार $\overrightarrow{OP}$ की AL तथा LB से न्यूनतम-दूरी

$\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$ और $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ है।

प्रश्नावली 11

1. उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जो सरल-रेखा मे $\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ मे से होकर जाय और समतल $\mathbf{r}.\,\mathbf{c}=q$ पर लम्ब हो।

2. उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु A (3, –2, –1) में से गुजरे और सदिश (1, –2, 4) और (3, 2, –5) के समान्तर हो।

3. सिद्ध करो कि सरल-रेखाएं

   $\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}$,

   और $\mathbf{r}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$,

   एक-दूसरे को काटती हैं।

   [पंजाब 60]

4. उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})$ में से हो कर जाय और सदिश $(3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k})$ पर लम्ब हों।

   (पटना 48)

5. उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$ में से

हो कर जाय और समतल $\mathbf{r}.(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=1$, और $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})=2$ की प्रतिच्छेद-रेखा पर लम्ब हो ।

[आगरा 64]

6 उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(-1,-1,-1)$ में से हो कर जाय और समतल

$\mathbf{r}.(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})=0$, और $\mathbf{r}.(\mathbf{j}+2\mathbf{k})=0$,

की प्रतिच्छेद-रेखा मे से भी गुजरे ।

7 उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जिसमें सरल-रेखा $\mathbf{r}=2\mathbf{i}+t(\mathbf{j}-\mathbf{k})$ स्थित हो और वह समतल $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+\mathbf{k})=3$, पर लम्ब हो । और उस बिन्दु का स्थिति-सदिश ज्ञात करो जिस पर सरल-रेखा $\mathbf{r}=t(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})$ इस समतल को काटती है ।

[दिल्ली 56]

8. सिद्ध करो कि समतल

$\mathbf{r}.(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k})=0$,

$\mathbf{r}.(\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k})=2$,

और $\mathbf{r}.(7\mathbf{j}-5\mathbf{k})+4=0$,

एक ही सरल-रेखा मे से गुजरते हैं ।

9. निम्न समतलो के समद्विभाजक समतल ज्ञात करो

$\mathbf{r}.(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})=9$,

और $\mathbf{r}.(4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+12\mathbf{k})+13=0$,

यह भी ज्ञात करो कि कौनसा उस कोण का समद्विभाजक है जिसमे मूल-बिन्दु स्थित है ।

10. उस सरल-रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $\mathbf{C}$ मे से गुजरती है और समतल $\mathbf{r}.\mathbf{a}=0$ के समान्तर है और रेखा $\mathbf{r}-\mathbf{a}'=t\mathbf{b}$ को काटती है ।

[आगरा 58]

11. सिद्ध करो कि उस सरल-रेखा का समीकरण, जो बिन्दु $\mathbf{a}$ में से हो कर जाय और समतल $\mathbf{r}.\mathbf{n}=p$ के समानान्तर हो और रेखा $\mathbf{r}=\mathbf{c}+t\mathbf{d}$ पर लम्ब हो,

$(\mathbf{r}-\mathbf{a})\times(\mathbf{d}\times\mathbf{n})=0$ है।

12. यदि a, b, c तीन असमरेख-बिन्दुओ A, B, C के स्थिति-सदिश हों, तो सिद्ध करो कि C की A; B को मिलाने वाली रेखा से दूरी

$$\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}-\mathbf{a}|} \text{ है।}$$

[संकेत अनुच्छेद 6. 10 का प्रयोग करो।]

13 सिद्ध करो कि रेखाएं

$\mathbf{r}=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$,

और $\mathbf{r}=\mathbf{b}+s(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$,

एक दूसरे को काटती है यदि $\mathbf{a}.\mathbf{c}=\mathbf{b}\,\mathbf{c}$ और उनका प्रतिच्छेद-बिन्दु भी ज्ञात करो यदि यह प्रतिबन्ध संतुष्ट हो तो।

14 सिद्ध करो कि उन सब सरल-रेखाओ के मध्य-बिन्दुओ का बिन्दु-पथ, जो दो अप्रतिच्छेदी-रेखाओ पर अवसान हो, एक समतल है जो इन दो रेखाओ के उभयनिष्ठ लम्ब को लम्ब-समद्विभाजित करता है।

15. एक इकाई घन मे किसी कोने की, उसमे से न गुजरने वाले विकर्ण से लम्बवत दूरी ज्ञात करो।

[आगरा 56]

[संकेत:–विकर्ण $\overrightarrow{OP}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\overrightarrow{OB}$ $(=\mathbf{j})$ का $\overrightarrow{OP}$ पर OM प्रक्षेप $=\frac{1}{\sqrt{3}}$. $p^2=OB^2-OM^2=2/3$.]

16 दो सरल-रेखाओ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करो जो क्रमश: बिन्दु A $(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ और B $(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k})$ मे से हो कर जाएं और उनकी दिशाएं $(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})$ और $(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k})$ हो। न्यूनतम दूरी का समीकरण भी ज्ञात करो।

17. समतलो $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})=4$, और $\mathbf{r}.(3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=4$, की प्रतिच्छेद-रेखा तथा $\mathbf{r}.(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})=1$, और $\mathbf{r}\,(4\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})=2$ की प्रतिच्छेद-रेखाओ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करो।

18. मूल-बिन्दु O के सापेक्ष, चार बिन्दुओ के स्थिति-सदिश a,b, c, d हैं। तो निम्न की ज्यामितीय व्याख्या करो:—

(i) $(\mathbf{c}-\mathbf{d})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})=0$,

(ii) $(\mathbf{c}-\mathbf{d})\ (\mathbf{a}-\mathbf{b})=0$,

19 उस बिन्दु का बिन्दु-पथ ज्ञात करो जो निम्न समतलो से समान दूरी पर हो।

$\mathbf{r}\ \mathbf{n}_1=q_1$.
$\mathbf{r}\ \mathbf{n}_2=q_2$
$\mathbf{r}.\ \mathbf{n}_3=q_3$.

[लखनऊ 51]

20. यदि $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ तीन असमतलीय-सदिश हो तो तीन समतलो $\mathbf{r}.\ \mathbf{a}=1$, $\mathbf{r}.\ \mathbf{b}=1$, $\mathbf{r}.\ \mathbf{c}=1$, का प्रतिच्छेद-बिन्दु ज्ञात करो।

[संकेत $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ भी असमतलीय होंगे अतः प्रतिच्छेद-बिन्दु माना $l\,\mathbf{b}\times\mathbf{c}+m\,\mathbf{c}\times\mathbf{a}+n\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ है तो यह समतलो के समीकरणो को संतुष्ट करेगा $\therefore\ l=\frac{1}{[\mathbf{abc}]}$ इत्यादि]

चतुष्फलक (Tetrahedron)

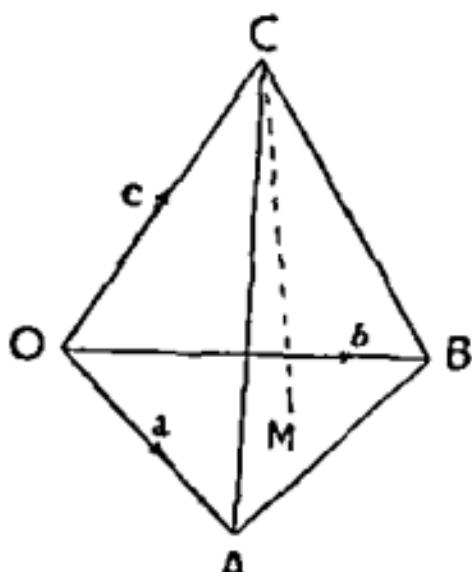
6 13 चतुष्फलक का आयतन। (Volume of tetrahedron)

माना OABC एक चतुष्फलक है और O के सापेक्ष A, B, C के स्थिति-सदिश क्रमशः $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ हैं। अर्थात्

$\vec{OA}=\mathbf{a}$, $\vec{OB}=\mathbf{b}$, $\vec{OC}=\mathbf{c}$.

त्रिभुज OAB का सदिश-क्षेत्रफल

$=\frac{1}{2}\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$ ...(1)

यह सदिश, समतल OAB पर लंब है

माना चतुष्फलक का आयतन V है। तो

$V = \frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) × लम्बवत् ऊंचाई।

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}.$

$= \frac{1}{6} (a \times b) \cdot c = \frac{1}{6} [abc].$ ....(2)

अतः चतुष्फलक का क्षेत्रफल $= \frac{1}{6}$ समान्तरफलक का क्षेत्रफल

उपप्रमेय नं० 1. यदि चतुष्फलक के शीर्ष a, b, c, d हों तो चतुष्फलक का आयतन

$= \frac{1}{6} [a - d, b - d, c - d].$. (3)

(शीर्ष D को मूल-बिन्दु लेने से)।

उपप्रमेय न० 2. प्रतिबन्ध कि चार बिन्दु a, b c, d समतलीय हों।

$[a - d, b - d, c - d] = 0.$

या $[abc] = [abd] + [acc] + [dbc]$. (4)

उपप्रमेय न० 3. यदि (x_p, y_p, z_p), $(p = 1, 2, 3, 4)$ शीर्षों के निर्देशांक हों तो इन चार बिन्दुओं से बनाए गए चतुष्फलक का आयतन =

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 \times x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

6 14 किसी चतुष्फलक के सम्मुख किनारों के उभयनिष्ठ अभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात करना। (To find the length of the common perpendicular to a pair of opposite edges.)

चतुष्फलक के सम्मुख किनारे, OB और AC का विचार करो, वे क्रमशः सदिश b और c − a के समान्तर हैं।

OB का सदिश समीकरण है

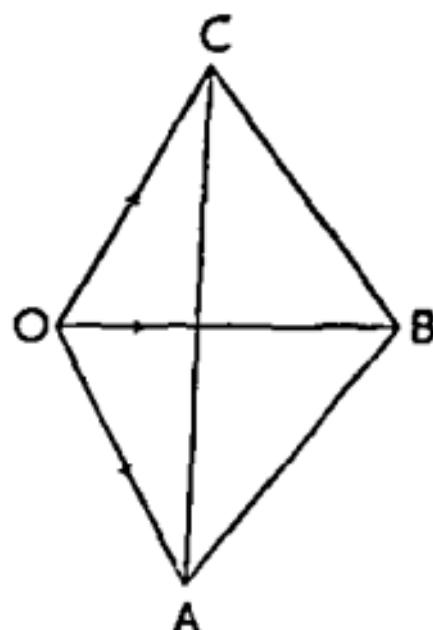
$\mathbf{r} = t\mathbf{b}$. ....(1)

और AC का

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s(\mathbf{c} - \mathbf{a})$. ... (2)

अतः दोनों के बीच में न्यूनतम

दूरी $= \dfrac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{a}]}{|\mathbf{b} \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})|}$.

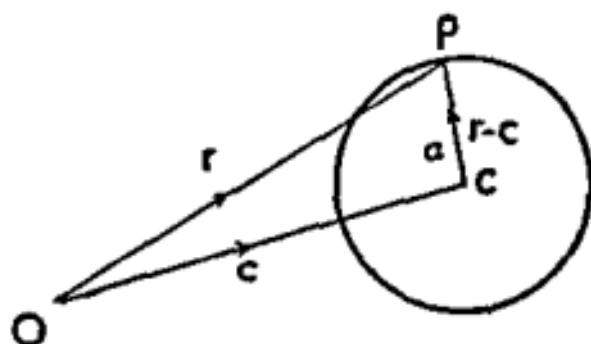
$= \dfrac{[\mathbf{abc}]}{|\mathbf{b} \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})|}$. . (3)

6.15 गोले का समीकरण (equation of a sphere.)

(i) उस गोले का समीकरण ज्ञात करो जिसका केन्द्र C है और त्रिज्या a है।

[आगरा 60, कलकत्ता 60]

माना मूल-बिन्दु O और इसके सापेक्ष केन्द्र C का स्थिति-सदिश **c** है।

माना गोले पर P ($=\mathbf{r}$) कोई बिन्दु है।

तो $\overrightarrow{CP} = \mathbf{r} - \mathbf{c}$ ... (1)

परन्तु CP एक त्रिज्या है। इसलिए $CP = a$.

$\therefore CP^2 = a^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{c}).(\mathbf{r} - \mathbf{c})$.

या $\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}.\mathbf{c} + c^2 - a^2 = 0.$ ....(2)

$c^2 - a^2 = k$ रखने पर गोले का समीकरण

$\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}.\mathbf{c} + k = 0.$ ....(3)

या $F(\mathbf{r}) = 0.$

चूँकि r गोले पर एक स्वेच्छेद बिन्दु है इसलिए (2) या (3) गोले का समीकरण है।

विशेष स्थिति में

(1) जबकि मूल-बिन्दु केन्द्र है तो गोले का समीकरण

$\mathbf{r}^2 = a^2.$ ....(4)

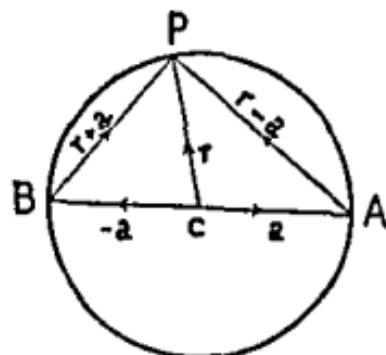
क्योंकि $\mathbf{c} = 0.$

(2) यदि मूल-बिन्दु गोले पर स्थित हो तो $\mathbf{c}^2 = a^2$, इसलिए गोले का समीकरण है

$\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}.\mathbf{c} = 0.$ ....(5)

(3) ऊपर समीकरण (4) से

$(\mathbf{r} - \mathbf{a}).(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = 0.$

इससे स्पष्ट है कि रेखा AP और BP एक-दूसरे पर लम्ब हैं।

6.16 एक गोले और सरल-रेखा का प्रतिच्छेदन ज्ञात करना।
(Intersection of a line and a sphere)

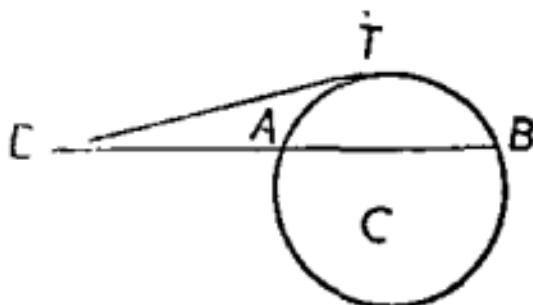
माना गोले का समीकरण है

$F(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}.\mathbf{c} + k = 0.$ ....(1)

और सरल-रेखा है

$\mathbf{r} = \mathbf{d} + t\mathbf{b}.$ ....(2)

जोकि बिन्दु D (=d) से गुजरती है और सदिश b के समान्तर है। b इकाई-सदिश है।

यदि रेखा (2) गोले को काटती है तो

$(\mathbf{d}+t\mathbf{b})^2 - 2(\mathbf{d}+t\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}+k=0$

या $t^2+2\mathbf{b}\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{c})\,t+(\mathbf{d}^2-2\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}+k)=0.$

या $t^2+2\mathbf{b}\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{c})\,t+F(\mathbf{d})=0.$ ....(3)

जबकि $F(\mathbf{d})=\mathbf{d}^2-2\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}+k.$

समीकरण (3) t में द्विघात समीकरण है। अतः सरल-रेखा गोले को दो बिन्दुओं पर काटती है। समीकरण (3) में t का मान निकाल कर (2) में रखने से हम दोनों बिन्दुओं को प्राप्त कर सकते हैं। बिन्दु वास्तविक और भिन्न होंगे यदि

$\mathbf{b}^2(\mathbf{d}-\mathbf{c})^2 > F(\mathbf{d}).$

और संपाती होंगे यदि $\mathbf{b}^2(\mathbf{d}-\mathbf{c})^2=F(\mathbf{d})$

यदि $\mathbf{b}^2(\mathbf{d}-\mathbf{c})^2 < F(\mathbf{d})$ तो बिन्दु काल्पनिक होंगे। अर्थात् रेखा गोले को नहीं काटेगी।

और $t_1 t_2=DA.\,DB=F(\mathbf{d})$

जोकि b से स्वतन्त्र है। अर्थात् बिन्दु D से किसी भी रेखा के लिए यह गुणनफल एक निश्चित राशि है।

जब $t_1=t_2$ तो दोनों बिन्दु संपाती होंगे। इस अवस्था में सरल-रेखा गोले को स्पर्श करती है। तब

$$DT^2=DA\;DB=F(\mathbf{d}). \tag{4}$$

व्यञ्जक $F(\mathbf{d})$, बिन्दु D की गोले $F(\mathbf{r})=0$. के सापेक्ष घात (power) कहलाती है। और इसका मान $=DT^2=CD^2-a^2$

बिन्दु D से यदि कोई भी स्पर्श रेखा गोले को खींची जाय तो उसकी लम्बाई

$\sqrt{CD^2 - a^2}$ एक स्थिर राशि होगी। अतः यह सब स्पर्श रेखाएं एक "स्पर्श-शंकु" (tangent cone) या "अन्वालोपी शंकु" (enveloping cone) का निर्माण करती हैं।

यदि बिन्दु D मूल-बिन्दु पर है तो इसकी घात $= F(0) = k$, है जो कि मूल-बिन्दु से गोले पर खींचे गए स्पर्शज्या के वर्ग के समान है। यदि O गोले के भीतर है तो k ऋण होगा अर्थात् O से स्पर्शज्या काल्पनिक होगा।

6.17 गोले पर स्पर्श-समतल। (*Tangent-plane to the sphere.*)

यदि बिन्दु D गोले पर स्थित है तो $F(\mathbf{d}) = 0$./ समीकरण (3) अनुच्छेद 6.16 से स्पष्ट है कि एक मूल शून्य होगा। दूसरा मूल भी शून्य होगा यदि

$$\mathbf{b}.(\mathbf{d} - \mathbf{c}) = 0. \qquad ....(1)$$

और यदि $\mathbf{r}$, स्पर्श-रेखा पर कोई बिन्दु है तो $(\mathbf{r} - \mathbf{d})$ सदिश $\mathbf{b}$ के समान्तर है अतः समीकरण (1) से

$$(\mathbf{r} - \mathbf{d}).(\mathbf{d} - \mathbf{c}) = 0. \qquad ....(2)$$

यह एक समतल है जो बिन्दु D में से गुजरता है और CD पर लम्ब है।

अब D में से खींची गई सब स्पर्श-रेखाएं समतल (2) पर स्थित हैं। अतः यह समतल गोले का "स्पर्श-समतल" (tangent-plane) कहलाता है।

चूंकि $F(\mathbf{d}) = 0$. तो हम समीकरण (2) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$\mathbf{r}.\mathbf{d} - \mathbf{d}^2 - \mathbf{c}.(\mathbf{r} - \mathbf{d}) + \mathbf{d}^2 - 2\mathbf{c}.\mathbf{d} + k = 0.$$

$$\text{या } \mathbf{r}.\mathbf{d} - \mathbf{c}.(\mathbf{r} + \mathbf{d}) + k = 0. \qquad ..(3)$$

समीकरण (3) गोले पर एक स्पर्श-समतल का मानक (standard) रूप है।

6.18 यह प्रतिबन्ध ज्ञात करो कि समतल $\mathbf{r}.\mathbf{n} = p$, गोले $F(\mathbf{r}) = 0$ को स्पर्श करे/(Find the condition that a given plane should touch the sphere)

गोले का समीकरण है।

$F(\mathbf{r})=0$. या $\mathbf{r}^2-2\mathbf{r}.\mathbf{c}+k=0$. ... (1)

समतल का समीकरण है

$\mathbf{r}.\mathbf{n}=p$. ... (2)

यदि समतल (2), गोले (1) को स्पर्श करता है तो इस पर केन्द्र से लम्ब गोले की त्रिज्या के बराबर होगा । अर्थात्

$$\left(\frac{p-\mathbf{c}\,\mathbf{n}}{n}\right)^2=a^2=c^2k. \quad ...(3)$$

6.19 प्रतिबन्ध, यदि दो गोले एक-दूसरे को समकोण पर काटें । (Condition that two spheres cut each other orthogonally)

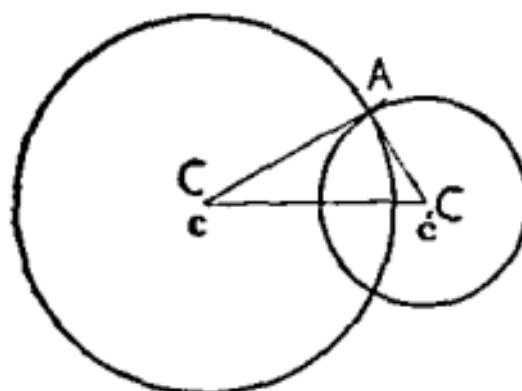
माना $\mathbf{r}^2-2\mathbf{r}\,\mathbf{c}+k=0$. ... (1)

और $\mathbf{r}^2-2\mathbf{r}.\mathbf{c}'+k'=0$ ... (2)

एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं ।

तो सिद्ध करना है कि $2\mathbf{c}.\mathbf{c}'=k+k'$. (3)

यदि दो गोले एक-दूसरे को लम्बवत काटते हैं तो प्रतिच्छेद-विन्दु पर एक गोले का स्पर्श समतल दूसरे गोले के केन्द्र में से गुजरता है । अत दोनो गोलों के केन्द्रों की दूरी का वर्ग उनकी त्रिज्याओं के वर्गों के योग के बराबर है । अर्थात्

$(\mathbf{c}\,\mathbf{c}')^2=(CA)^2+C'A)^2$

या $(\mathbf{c}-\mathbf{c}')^2=a^2+a'^2$,

या $\mathbf{c}'^2+\mathbf{c}^2-2\mathbf{c}\,\mathbf{c}'=\mathbf{c}^2-k+\mathbf{c}'^2-k$,

या $2\mathbf{c}.\mathbf{c}'=k+k'$. ....(4)

6.20 ध्रुवीय-समतल/(Polar plane).

किसी बिन्दु का एक गोले के सापेक्ष ध्रुवीय-समतल उन बिन्दुओं का बिन्दु-पथ है जिन पर स्पर्श-समतल दिए हुए बिन्दु में से गुजरते हैं।

माना गोले का समीकरण है

$$\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}.\mathbf{c} + k = 0. \quad \dots(1)$$

बिन्दु $\mathbf{d}$ पर स्पर्श-समतल है

$$\mathbf{r}.\mathbf{d} - \mathbf{c}.\,(\mathbf{r}+\mathbf{d}) + k = 0. \quad \dots(2)$$

माना दिया हुआ बिन्दु $P(=\mathbf{h})$ है।

तो समतल (2) P में से गुजरता है।

$$\therefore \mathbf{h}.\mathbf{d} - \mathbf{c}.\,(\mathbf{h}+\mathbf{d}) + k = 0. \quad \dots(3)$$

अतः $\mathbf{d}$ का बिन्दु-पथ है

$$\mathbf{r}.\mathbf{h} - \mathbf{c}.\,(\mathbf{h}+\mathbf{r}) + k = 0. \quad \dots(4)$$

यह अभीष्ट ध्रुवीय-समतल का समीकरण है।

समीकरण (4) को हम इस प्रकार से भी लिख सकते हैं—

$$\mathbf{r}.\,(\mathbf{h}-\mathbf{c}) = (\mathbf{c}.\mathbf{h} - k). \quad \dots(5)$$

(5) से स्पष्ट है कि ध्रुवीय-समतल केन्द्र और बिन्दु $\mathbf{h}$ को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब होती है।

ध्रुवीय-समतल ज्ञात करने की सरल विधि :—

यदि बिन्दु $\mathbf{h}$ है तो गोले के समीकरण में $\mathbf{r}^2$ के स्थान पर $\mathbf{r}.\mathbf{h}$ और $2\mathbf{r}$ के स्थान पर $(\mathbf{r}+\mathbf{h})$ लिख दें।

उदाहरण 1

उस गोले का समीकरण ज्ञात करो जिसके व्यास के दो सिरे $\mathbf{g}$ और $\mathbf{h}$ हैं। [ब० हि० वि० 54]

माना गोले पर कोई बिन्दु $P\,(=\mathbf{r})$ है। और गोले का केन्द्र C है, तथा A और B इसके व्यास के दो सिरे हैं जिनके स्थिति-सदिश क्रमशः A और B हैं।

$$\overrightarrow{AP} = \mathbf{r} - \mathbf{g}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BP} = \mathbf{r} - \mathbf{b} \qquad \text{....(2)}$$

चूँकि AB व्यास है इसलिए ∠ APB एक समकोण है। इसलिए

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}).(\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0 \qquad \text{... (3)}$$

यह गोले का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 2

उस गोले के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात करो जो निम्न चार समतलों द्वारा निर्मित किए गए चतुष्फलक के अन्तर्गत हो

$$\mathbf{r}.\mathbf{i} = 0, \mathbf{r}.\mathbf{j} = 0, \mathbf{r}.\mathbf{k} = 0.$$

और $\mathbf{r}.(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 0$

गोले का समीकरण भी ज्ञात करो।

[उ० हि० वि० 53, आगरा 54, 56]

माना गोले का केन्द्र

$$\mathbf{c} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \text{ है।} \qquad \text{....(1)}$$

चूँकि गोला चतुष्फलक के अन्तर्गत है इसलिए यह चारों समतलों को स्पर्श करता है। अतः केन्द्र से इन पर लम्ब त्रिज्या के बराबर हैं।

$$\therefore \frac{\mathbf{c}.\mathbf{i}}{1} = x = \frac{\mathbf{c}.\mathbf{j}}{1} = y = \frac{\mathbf{c}.\mathbf{k}}{1} = z = \frac{a - \mathbf{c}.(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{\sqrt{3}}$$

$$= p. \text{ (माना)}$$

$$\text{या } \mathbf{c}.\mathbf{i} = \mathbf{c}.\mathbf{j} = \mathbf{c}.\mathbf{k} = p. \qquad \text{... (2)}$$

और $\frac{a-3p}{\sqrt{3}}=p.$

या $p(\sqrt{3}+3)=a.$

या $p=\frac{a}{3+\sqrt{3}}=\frac{a(3-\sqrt{3})}{6}$ . ....(3)

$\therefore x=y=z=\frac{a(3-\sqrt{3})}{6}.$

अतः गोले का केन्द्र

$\mathbf{c}=\frac{a}{6}(3-\sqrt{3})(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).$ ....(4)

गोले का समीकरण है

$(\mathbf{r}-\mathbf{c})^2=a^2.$ ....(5)

उदाहरण 3.

सिद्ध करो कि निम्न समतलों द्वारा बनाए गए चतुष्फलक का आयतन $\frac{2p^3}{3lmn}$ है।

$\mathbf{r}.(m\mathbf{j}+r\mathbf{k})=o.$

$\mathbf{r}.(n\mathbf{k}+l\mathbf{i})=o.$

$\mathbf{r}.(l\mathbf{i}+m\mathbf{j})=o.$

और $\mathbf{r}.(l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+r\mathbf{k})=p.$

[आगरा 45, 59, लखनऊ 52, 58, बनारस 54, 56, 58]

हम पहले चतुष्फलक के शीर्ष ज्ञात करते हैं। समतलों के समीकरण हैं

$\mathbf{r}.(m\mathbf{j}+n\mathbf{k})=o.$ ....(1)

$\mathbf{r}.(r\mathbf{k}+l\mathbf{i})=o.$ ....(2)

$\mathbf{r}.(l\mathbf{i}+m\mathbf{j})=o.$ ....(3)

और $\mathbf{r}.(l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k})=p.$ ....(4)

(1), (2) और (3) मूलबिन्दु में से गुजरते हैं।

(1), (2) और (4) से

$\mathbf{r}.l\mathbf{i}=p.$

या r i $= p/l$ ....(5)

इसी प्रकार r.j $= p/m.$ ....(6)

(4) मे (5) और (6) से मान रखने पर

$p+p+\mathbf{r}\, n\mathbf{k}=p.$

या r.k= $-p/n.$ ....(7)

अत: (1), (2) और (4) का प्रतिच्छेद—बिन्दु A(=a)

$$=\left(\frac{p}{l}\ \mathbf{i}+\frac{p}{m}\ \mathbf{j}-\frac{p}{n}\ \mathbf{k}\right) \qquad ...(8)$$

इसी प्रकार (1), (3) और (4) से तथा (2), (3), (4) से हम दूसरे दो शीर्ष

$$\mathrm{B}\ (=\mathbf{b})=\left(\frac{p}{l}\ \mathbf{i}-\frac{p}{m}\ \mathbf{j}+\frac{p}{n}\ \mathbf{k}\right). \qquad .(9)$$

और $$\mathrm{C}\ (=\mathbf{c})=\left(-\frac{p}{l}\ \mathbf{i}+\frac{p}{m}\ \mathbf{j}+\frac{p}{n}\ \mathbf{k}\right) \qquad ....(10)$$

प्राप्त कर सक्ते हैं।

अत चतुष्फलक का आयतन

$$=\frac{1}{6}\,[\mathbf{abc}]=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} p/l & p/m & -p/n \\ p/l & -p/m & p/n \\ -p\ l & p/m & p/n \end{vmatrix}.$$

$$=\frac{1}{6}\frac{p^3}{lmn}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$=\frac{2}{3}\frac{p^3}{lmn}.$$

उदाहरण 4

यदि बिन्दु O से खींची गई सरल-रेखा किसी गोले को काटती है तो सिद्ध करो कि गोले की पृष्ठ और O का गोले के सापेक्ष ध्रुवीय समतल, इस रेखा को हरात्मकत: (harmonically) बाटते हैं।

[आगरा 53, 60, 66, 67]

माना O मूल-बिन्दु है और गोले का समीकरण

$r^2 - 2r.c + k \quad 0$, है । ....(1)

O की (1) के सापेक्ष ध्रुवीय-समतल बराबर है

$r.O - c \;\; (r + O) + k = 0.$

या $r.c \qquad = k.$ (2)

माना O में से सरल-रेखा है

$r = t \;\; b.$ ....(3)

जबकि b इकाई सदिश है ।

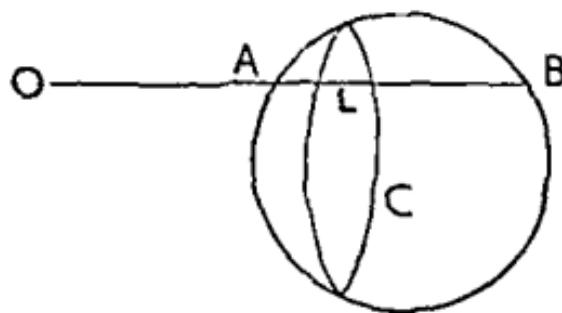
माना रेखा (3) गोले (1) को बिन्दु A और B पर काटती है । तो

$t^2 - 2t\,(b.c) + k = 0.$ ....(4)

माना समीकरण (4) के दो मूल t_1 और t_2 हैं ।

तो $t_1 + t_2 \quad - OA + OB.$

$\qquad - 2b\,c$ ....(5)

और

$OA.OB = t_1 \;\; t_2 = k$ ....(6)

(5) और (6) से

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2\,b.c}{k}. \qquad ....(7)$$

माना (2) और (3) का प्रतिच्छेद-बिन्दु L है ।

तो $t\; b.c = k.$

$$\text{या } t = \frac{k}{b\,c} = OL. \qquad ....(8)$$

(7) और (8) से

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{2}{OL}. \qquad ....(9)$$

(9) से स्पष्ट है कि OA, OL, और OB हरात्मक श्रेणी मे हैं।

प्रश्नावली 12

1. सिद्ध करो कि अर्ध-वृत्त मे समकोण होता है। [आगरा 67]
   और यह भी सिद्ध करो कि एक गोले का व्यास इसकी पृष्ठ पर समकोण अंतरित करता है। [आगरा 65]

2. चतुष्फलक के आयतन V के लिए निम्न सूत्र सिद्ध करो, जबकि a, b, c तीन सगामी किनारे हैं और θ, ϕ, ψ परस्पर उनके बीच के कोण हैं।

$$V^2=\frac{a^2 b^2 c^2}{36}\begin{vmatrix} 1 & \cos\phi & \cos\psi \\ \cos\phi & 1 & \cos\theta \\ \cos\psi & \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

[आगरा 57, लखनऊ 55, पंजाब 58]

[संकेत $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=ab\cos\psi$ इत्यादि/और

$$[\mathbf{l}\ \mathbf{m}\ \mathbf{n}]\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=\begin{vmatrix} \mathbf{a.l} & \mathbf{a.m} & \mathbf{a.n} \\ \mathbf{b.l} & \mathbf{b.m} & \mathbf{b.n} \\ \mathbf{c.l} & \mathbf{c.m} & \mathbf{c.n} \end{vmatrix}$$ इत्यादि....1]

3. एक स्थिर बिन्दु $(a, b, c,)$ मे से होकर जाने वाले समतल निर्देशाक-अक्षों को A, B, C पर काटते हैं। तो सिद्ध करो कि O, A, B, C मे से गुजरने वाले गोले के केन्द्र का बिन्दु-पथ

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2 \text{ है।}$$

4. सिद्ध करो कि जो गोला, गोलो $F'(\mathbf{r})=0$ और $F(\mathbf{r})=0$ को समकोण पर काटता है, वह गोले $F(\mathbf{r})-\lambda F'(\mathbf{r})=0$ को भी समकोण

पर काटता है ।

5. सिद्ध करो चतुष्फलक का प्रत्येक तल केन्द्रक पर समान आयतन अंतरित करता है ।

[संकेत केन्द्रक को मूल-बिन्दु मानो, तो $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=0$....]

6 एक दिए हुए बिन्दु O से, किसी स्थिर गोले तक एक सरल-रेखा OP खींची गई है । OP पर बिन्दु Q इस प्रकार से लिया गया है कि अनुपात OP : OQ एक निश्चित अंक है । तो सिद्ध करो कि Q का बिन्दु-पथ एक गोला है ।

7 सिद्ध करो कि गोलो $F(\mathbf{r})=0$, और $F'(\mathbf{r})=0$, का मूल-समतल (Radical plane)

$2\mathbf{r}.(\mathbf{c}-\mathbf{c}')=k-k'$ है ।

8 उस गोले का समीकरण ज्ञात करो जो निम्न चार समतलों द्वारा बनाए गए चतुष्फलक का परिगत हो ।

$\mathbf{r}.\mathbf{i}=\mathbf{r}.\mathbf{j}=\mathbf{r}.\mathbf{k}=0.$

और $\mathbf{r}.(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=a.$

9. सिद्ध करो कि उस चतुष्फलक का आयतन, जिसका शीर्ष (x, y, z) है और आधार, बिन्दुओ (a, o, o), (o, b, o) और (o, o, c) से बनाया हुआ त्रिभुज है,

[आगरा एम० एससी० 47]

$$\frac{1}{6}\ abc\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)$$ है, जबकि निर्देशांक-अक्ष समकोणीय हैं ।

(संकेत चार शीर्ष $a\mathbf{i}, b\mathbf{j}, c\mathbf{k}$ और $(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$ हैं ।)

10 सिद्ध करो कि विन्दु A, जिसका स्थिति-सदिश $\mathbf{a}$ है उसकी बिन्दुओ $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ मे होकर जाने वाले समतल से लम्बवत दूरी

$$\frac{[\mathbf{bcd}]+[\mathbf{cad}]+[\mathbf{abd}]-[\mathbf{abc}]}{|\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{d}+\mathbf{d}\times\mathbf{b}|}$$ है ।

11. सिद्ध करो कि चार बिन्दु जिनके स्थिति-सदिश $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ हैं; उनमे से हो कर जाने वाले गोले का केन्द्र एक ऐसा बिन्दु है जो निम्न तीन समतलों पर स्थित है ।

$$\{\mathbf{r}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=0,$$
$$\{\mathbf{r}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})\}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0,$$
$$\{\mathbf{r}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{a})\}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0,$$

7

सदिशों का अवकलन और समाकलन

7·1 परिचय

इस अध्याय मे हम सदिशों का केवल किसी अदिश-स्वतंत्र-चर के सापेक्ष अवकलन और समाकलन की व्याख्या करेंगे। आंशिक अवकलन (Partial differentiation) इस पुस्तक के विषय क्षेत्र से बाहर है।

7·2 किसी सदिश का अवकलज (Derivative of a Vector)

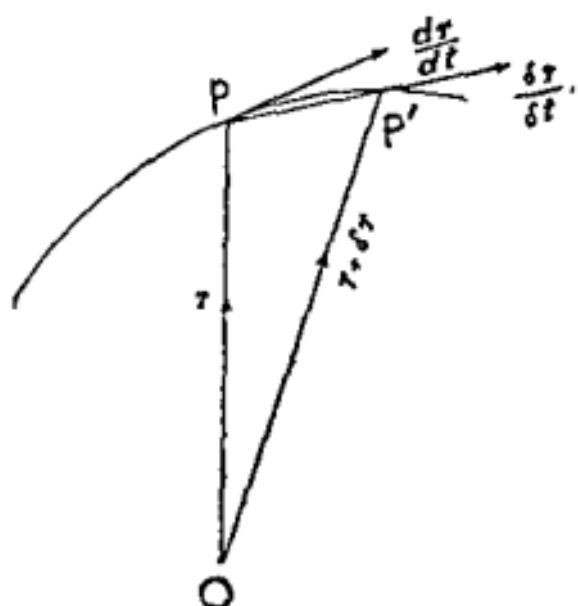
माना एक सदिश r किसी अदिश–राशि t का सतत (Continuous) और एकमान–फलन (Single valued function) है। तब t के प्रत्येक मान के अनुरूप r का एक ही मान है। जैसे ही t सतत विचरण करता है तदनुसार r भी ऐसे ही विचरण करता है। माना समय t पर सदिश r को, O के सापेक्ष बिन्दु P के स्थिति-सदिश, द्वारा अभिव्यक्त किया जाता है। जैसे t मे परिवर्तन होता है तदनुसार r मे भी इस प्रकार से परिवर्तन होता है कि इसका अंतिम सिरा अवकाश में एक वक्र बनाता है। t मे δ_t की वृद्धि, r मे δ_r की वृद्धि उत्पन्न करती है। अत: अदिश के मान $t+\delta_t$ के अनुरूप सदिश का मान $r+\delta_r$। नया सदिश–त्रिज्या (radius vector) OP′ है।

वृद्धि δ_r = सदिश PP′

$(\because \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PP'})$ अनुपात $\frac{\delta_r}{\delta_t}$

एक सदिश है जोकि जीवा PP′ से समरेख है; परन्तु परिमाण में PP′ का $\frac{1}{\delta_t}$ गुना है।

ज्यों-ज्यों δ_t शून्य की ओर प्रवृत्त होता है त्यों-त्यो P′, P की ओर उस पर संपाती होने के लिए सरकता है। जीवा PP′ बिन्दु P पर स्पर्श,

रेखा बन जाएगी। जैसे ही δ_t शून्य की ग्रोर प्रवृत्त होता है तो भागफल

$\frac{\delta r}{\delta t}$ का सीमात-मान एक सदिश है जिसकी दिशा, P पर खींची गई स्पर्श-रेखा की दिशा है, जिस ग्रोर t बढता है।

यदि ग्रनुपात $\frac{\delta r}{\delta_t}$ के सीमान्त-मान (limiting value) का ग्रस्तित्व है तो इसको $\frac{dr}{d_t}$ से चिह्नित किया जाता है। ग्रौर यह r का t के सापेक्ष ग्रवकलन-गुणाक (defferential co-efficient) या ग्रवकलज (derivative) कहलाता है। ग्रत:

$$Lt\ \delta_t \rightarrow O\ \frac{\delta r}{\delta_t} = \frac{dr}{dt}. \qquad \ldots\ldots(1)$$

जब इस सीमा का ग्रस्तित्व होता है तो फलन r, t के सापेक्ष ग्रवकलनीय-फलन (differentiable-function) कहलाता है। ग्रवकलजो के प्राप्त करने की विधि को ग्रवकलन (differentiation) कहते हैं।

सामान्य रूप से $\frac{dr}{dt}$ स्वयं t का फलन होगा ग्रौर यदि इसके ग्रवकलज का ग्रस्तित्व है तो उसको $\frac{d^2r}{dt^2}$ से ग्रभिव्यक्त करते हैं ग्रौर यह r का द्वितीय-ग्रवकलन-गुणाक (second-differential Co-efficient)

कहलाता है। इसी प्रकार $\frac{d^2r}{dt^2}$ का अवकलज $\frac{d^3r}{dt^3}$, r का तृतीय अवकलज है। इत्यादि....।

यान्त्रिकी (mechanies) में समय के सापेक्ष अवकलन, अवकलित-राशि (quantity differentiated) के ऊपर बिन्दु (dot) द्वारा भी अभिव्यक्त किया जाता है। अत $\dot{r}, \ddot{r}$ ....से अभिप्राय $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$ ... है।

7·3 तात्कालिक वेग और त्वरण (Instantaneous velocity and acceleration)

माना कोई गतिमान कण, मूल बिन्दु O के सापेक्ष t समय पर P पर है, और बिन्दु P का, स्थिति-सदिश r है। और $t+\delta_t$ समय पर वह निकटवर्ती बिन्दु P' पर है, और $OP' = r + \delta r$। अतः δ_t कालान्तर में विस्थापन $\overrightarrow{PP}$ है।

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = r + \delta_r - r = \delta_r \qquad \cdots\cdots(1)$$

इसलिए $\frac{\delta r}{\delta_t}$ इस कालान्तर में औसत वेग अभिव्यक्त करता है। जब $\delta_t \to 0$, औसत वेग का सीमात-मान, कण का तात्कालिक वेग होता है। अतः तात्कालिक वेग का अभिव्यक्त करने वाला सदिश

$$V = \frac{dr}{d_t}. \qquad \cdots\cdots(1)$$

यह कण के बिन्दु पथ को P पर स्पर्श-रेखा की दिशा में सदिश है।

इसी प्रकार यदि सदिश-वेग V मे वृद्धि δ_v, कालान्तर δ_t मे हो, तो भागफल $\frac{\delta_v}{\delta_t}$ इस कालान्तर δ_t मे औसत त्वरण अभिव्यक्त करेगा। अतः कण का तात्कालिक त्वरण इस औसत त्वरण का सीमांत-मान है जब $\delta_t \to O$. अतः

$$\text{सदिश } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}. \qquad \cdots\cdots(3)$$

गतिमान कण का तात्कालिक त्वरण अभिव्यक्त करता है।

7·4 कुछ मानक रूपों का अवकलन (Differentiation of some standard forms)

7·4 (1) अचर सदिश का अवकलज

माना c एक अचर सदिश है। तो t मे δ_t की वृद्धि से c मे कोई परिवर्तन नही होता अर्थात् $\delta_c = 0$। तब

$$\frac{dc}{dt} = \text{Lt}\ \delta_t \to 0\ \frac{\delta_c}{\delta_t} = 0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

अत: किसी अचर सदिश c का अवकलज शून्य होता है।

7·4 (2) सदिशों के योग का अवकलज (Derivative of a sum.)

माना r और s दो अवकलनीय-सदिश, t के फलन हैं। और t में δ_t की वृद्धि के कारण इन मे वृद्धिया क्रमश δ_r और δ_s है। तो

$$\delta\ (r+s) = (r+\delta_r+s+\delta_s) - (r+s).$$
$$= \delta r + \delta_s.$$

∴ भागफल

$$\frac{\delta\ (r+s)}{\delta_t} = \frac{\delta_r}{\delta_t} + \frac{\delta_s}{\delta_t}.$$

जैसे $\delta_t \to 0$ दोनो ओर सीमान-मान लेने पर

$$\underset{\delta \to 0}{\text{Lt}}\ \frac{\delta\ (r+s)}{\delta_t} = \underset{\delta_t \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\delta_r}{\delta_t} + \frac{\delta_s}{\delta_t}\right).$$

या $$\frac{d\ (r+s)}{dt} = \frac{dr}{dt} + \frac{ds}{dt}. \qquad \cdots\ (2)$$

अर्थात् दो या अधिक सदिशो के योग का अवकलज=उनके अवकलजो के योग के।

7·4 (3) फलन के फलन का अवकलज (Derivative of function of a function)

माना r एक अदिश-चर s का अवकलनीय-फलन है। और s एक दूसरे चर t का अवकलनीय-फलन है। तो t मे δ_t की वृद्धि, s और r मे δ_s और δ_r की वृद्धि उत्पन्न करती है। और δ_r, δ_s भी δ_t के साथ शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं।

बीजीय–सर्वसमिका (algebraic identity) से

$$\frac{\delta_r}{\delta_t} = \frac{\delta_r}{\delta_s} \cdot \frac{\delta_s}{\delta_t}.$$

जैसे $\delta_t \to o$ दोनों ओर सीमान्त–मान लेने से हमें प्राप्त है।

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \cdots\cdots(3)$$

7·4 (4) अदिश s और सदिश r के गुणनफल का अवकलज।
(Derivative of the product of a vector r and scalar s)

माना s और r क्रमश t के अदिश और सदिश अवकलनीय–फलन है और/t में वृद्धि δ_t के अनुसार s और r में वृद्धि δ_s और δ_r है। तो

$$\frac{d}{d_t}(s\,r) = \underset{\delta_t \to o}{Lt} \frac{[(\delta + \delta_s)(r + \delta_r) - s\,r]}{\delta_t}$$

$$= \underset{\delta_t \to O}{Lt} \frac{(r\,\delta_s + s\,\delta_r + \delta_r\,\delta_s)}{\delta_t}.$$

$$= \underset{\delta_t \to O}{Lt} \left(r\frac{\delta_s}{\delta_t} + s\frac{\delta_r}{\delta_t} + sr\frac{\delta_s}{\delta_t} \right).$$

∴ δ_s और δ_r शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं जैसे ही $\delta_t \to O$.

$$\therefore \underset{\delta_t \to O}{Lt} \delta r . \frac{\delta_s}{\delta_t} = O.$$

अत: $$\frac{d}{d_t}(s\,r) = r\,\frac{d_s}{d_t} + s\,\frac{d_r}{d_t} \quad \cdots\cdots(4)$$

7·4 (5) सदिशों के अदिश–गुणनफल और अदिश–गुणनफल का अवकलज (Derivative of scalar and cross products of vectors)

माना a और b अदिश–चर t के दो अवकलनीय–सदिश हैं। तो

$$\frac{d}{d_t}(a\,.\,b) = \underset{\delta_t \to o}{Lt} \frac{(a + \delta a).(b + \delta b) - (a.b)}{\delta_t}$$

$$= \underset{\delta t \to O}{Lt} \left(b\frac{\delta a}{\delta_t} + a\,\frac{\delta_b}{\delta_t} + \delta a\,\frac{\delta b}{\delta_t} \right).$$

$$= \mathbf{b}.\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a}.\frac{d\mathbf{b}}{dt}. \qquad \text{---}(5)$$

इसी प्रकार

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt}. \qquad \text{---}(6)$$

(राज० 1971)

नोट—(6) में किसी भी पद में गुणन-खण्डों के क्रम में परिवर्तन करने से चिह्न बदल जाता है।

और $$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}].$$

$$= \mathbf{a}.\mathbf{b}\times\frac{d\mathbf{c}}{dt} + \mathbf{a}\ \frac{d\mathbf{b}}{dt}\times\mathbf{c} + \frac{d\mathbf{a}}{dt}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}.$$

$$= \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b},\mathbf{c}\right) + \left(\mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}\mathbf{c}\right) + \left(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right). \qquad \text{---}(7)$$

और

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{a}\times\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\times\mathbf{c}\right) + \mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right). \qquad \text{---}(8)$$

नोट—(8) में गुणन खण्डों के क्रम को बनाए रखना है और (7) में प्रत्येक पद में चक्रीय क्रम को।

नोट—यह याद रहे कि $\mathbf{r}$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ पर लम्ब होता है। अतः यदि $\mathbf{r}$ इकाई सदिश हो तो $\left|\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = |\mathbf{r}|\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\sin 90^\circ = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$ ---(9)

(राज० 1972)

7·5 अवकलन विशेष स्थिति में (Particular cases of differentiation.)

(i) ऊपर (7.45) में समीकरण (5) में यदि $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ तो

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}.\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}\ \frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

या $\frac{d}{dt}(a^2) = 2\, a.\, \frac{da}{dt}$.

यदि सदिश a का मापांक a है तो $a^2 = a^2$, और

$$\frac{d}{dt}(a^2) = 2\, a\frac{da}{dt}.$$

अतः $a.\frac{da}{dt} = a\, \frac{da}{dt}$. ....(1)

(ii) यदि सदिश a की लम्बाई अचर है और a के बराबर है तथा $b = a$, तो

$$\frac{d}{dt}(a.a) = 2\, a\,\frac{da}{dt} = 2a\frac{da}{dt} = 0. \qquad \text{........(2)}$$

अतः $a.\frac{da}{dt} = 0$. ....(3)

(3) से स्पष्ट है कि एक सदिश जिसकी लम्बाई अचर है उसका अवकलज उस पर लम्ब होता है।

(iii) (7 45) (6) में यदि $b = \frac{da}{dt}$, तो

$$\frac{d}{dt}\left(a \times \frac{da}{dt}\right) = a \times \frac{d^2a}{dt^2}. \qquad \text{(राज॰ 1971)}$$

(क्योंकि $\frac{da}{dt} \times \frac{da}{dt} = 0$. (राज॰ 1971)

7·6 सदिश r के अवकलज का कार्तीय तुल्यांक (Carestian equivalent of derivative of a Vector r)

माना सदिश r को, निर्देशाक-अक्षों के समानान्तर इकाई सादिशों i, j, k के पदों में निम्न रूप में अभिव्यक्त किया गया है।

$r = xi + yj + gk$, ...(1)

जबकि x, y, z अदिश t के फलन है।

ज्योंही t बदल कर $t + \delta_t$ हो जाता है। माना तब r, x, y, z, क्रमशः $r + \delta_r$, $x + \delta_x$, $y + \delta_y$, और $z + \delta_z$ में परिवर्तित होते है। तो

$$\mathbf{r}+\delta_r=(x+\delta_x)\mathbf{i}+(y+\delta_y)\mathbf{j}+(z+\delta_z)\mathbf{k}. \quad \cdots\cdots(2)$$

या $\delta_r=\delta_x\mathbf{i}+\delta_y\mathbf{j}+\delta_z\mathbf{k}.$

$$\therefore \quad \frac{\delta_r}{\delta_t}=\frac{\delta_x}{\delta_t}\mathbf{i}+\frac{\delta_y}{\delta t}\mathbf{j}+\frac{\delta_z}{\delta t}\mathbf{k}.$$

जब $\delta_t \to 0$ तो

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dx}{d_t}\mathbf{i}+\frac{dy}{d_t}\mathbf{j}+\frac{dz}{d_t}\mathbf{k}. \quad \cdots\cdots(3)$$

अत. सदिश $\mathbf{r}$ के प्रथम अवकलज के घटक, $\mathbf{r}$ के घटको के अवकलज ही है।

हम ऊपर परिणाम (3) का n–वें अवकलज तक विस्तार कर सकते हैं। अर्थात्

$$\frac{d^n\mathbf{r}}{dt^n}=\frac{d^nx}{dt^n}\mathbf{i}+\frac{d^ny}{dt^n}\mathbf{j}+\frac{d^nz}{dt^n}\mathbf{k} \quad \cdots\cdots(4)$$

7.7 समाकलन (Integration)

समाकलन, अवकलन की प्रतिवर्ती विधि है। यदि हमे एक सदिश–फलन $\mathbf{r}$ दिया हुआ है तो एक और ऐसे फलन को ज्ञात करने की विधि कि

$$\frac{dF}{dt}=\mathbf{r},$$

समाकलन कहलाती है। और F, यदि इसका अस्तित्व है तो, $\mathbf{r}$ का t के सापेक्ष समाकलन (integral) कहलाता है। और इसको निम्न रूप से भी लिखा जाता है।

$$F=\int \mathbf{r}\,dt.$$

फलन $\mathbf{r}$ समाकल्य (integrand) कहलाता है। t समाकलन का चर है और $\int$ समाकलन का चिह्न है।

यदि $\dfrac{dF}{dt}=\mathbf{r}$ $\cdots\cdots(1)$

और $\mathbf{c}$ एक स्वेच्छ अचर सदिश है, तब

$$\frac{d}{dt}(F+\mathbf{c})=\mathbf{r}. \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\therefore \quad \int \mathbf{r}\,dt=F, \text{ या } =F+\mathbf{c}. \quad \cdots\cdots(3)$$

(3) से स्पष्ट है कि समाकल F एक स्वेच्छ अचर-सदिश की सीमा तक अनिश्चित है। इस कारण F अनिश्चित समाकल (indefinite integral) कहलाता है और c समाकलन का स्थिराक है।

7.8 कुछ मानक परिणाम (Some standard results) ऊपर अवकलन में प्राप्त किये गए परिणामों का उपयोग करके हम समाकलन के निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं जोकि बहुत उपयोगी होंगे।

(i) $\int\left(\mathbf{r}.\dfrac{d\mathbf{s}}{dt}+\mathbf{s}.\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right)dt=\mathbf{r}.\mathbf{s}+c.$

(ii) $\int 2\,\mathbf{r}.\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}dt \qquad =\mathbf{r}^2+c.$

(iii) $\int 2\,\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}.\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad =\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2+c$

(iv) $\int \mathbf{r}\times\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad =\mathbf{r}\times\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}+\vec{c}.$

(v) $\int\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}-\dfrac{\mathbf{r}}{r^2}.\dfrac{dr}{dt}\right)dt=\dfrac{\mathbf{r}}{r}+\vec{c}$

(vi) यदि a एक अचर-सदिश है तो

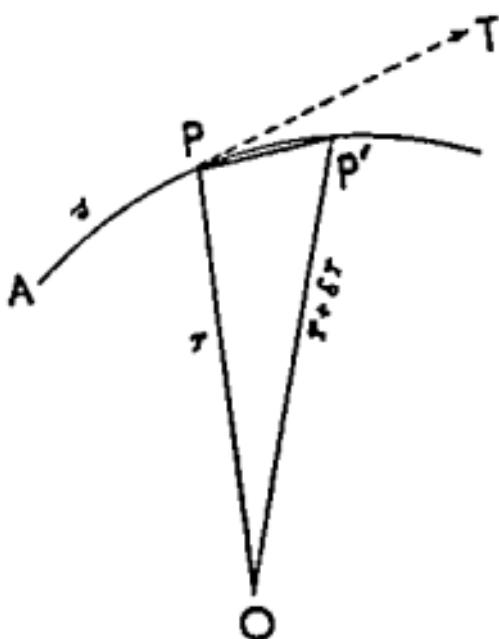
$$\int \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt \qquad =\mathbf{a}\times\mathbf{r}+\vec{c}$$

नोट—समाकलन का स्थिराक उसी प्रकृति का होता है जिस प्रकृति का समाकल्य (integrand) हो। अतः ऊपर (i), (ii), और (iii) में स्थिराक c

सदिश-राशि, और (iv), (v) और (vi) में $\vec{c}$ सदिश हैं।

7.9 किसी वक्र पर एक दिए हुए बिन्दु पर स्पर्श-रेखा ज्ञात करना (Tangent at a given point on a curve)

माना P किसी वक्र पर एक चर बिन्दु है और वक्र पर एक स्थिर-बिन्दु A से मापने से चाप AP = s.

माना मूल बिन्दु o के सापेक्ष P का स्थिति सदिश r है। और r चाप s का फलन है। माना P और P′ दो निकटवर्ती बिन्दु हैं जिनके स्थिति-सदिश

क्रमश r और $r+\delta r$ है। और तदनुसार चाप $AP = s$, और $AP' = s + \delta s$

$$\overrightarrow{PP} = \delta r. \quad \cdots(1)$$

भागफल $\frac{\delta r}{\delta s}$ एक सदिश है जोकि δr के समानान्तर है।

अन्त मे जब बिन्दु P′, P की ओर इस पर संपाती होने के लिए बढता है तो जीवा PP′, P पर स्पर्श-रेखा बनती है। और इस स्पर्श-रेखा की दिशा δr की दिशा है।

$\frac{\delta r}{\delta s}$ का सीमांत मान $= 1$.

$$\text{अत:} \quad \frac{dr}{d_s} = Lt_{\ \delta_s \to 0} \ \frac{\delta r}{\delta_s} = \vec{t}\ (\text{माना}) \quad \cdots(2)$$

$\vec{t}$, बिन्दु P पर स्पर्श-रेखा कि दिशा मे इकाई सदिश है।

इसको इकाई स्पर्श-रेखा कहते हैं।

यदि 0 में से खींचे गए निर्देशांक-अक्षों के सापेक्ष बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) है। तो

$$r = xi + yj + zk. \quad \cdots(3)$$

और $\vec{t} = \frac{dr}{d_s} = \frac{dx}{d_s} i + \frac{dy}{d_s} j + \frac{dz}{d_s} k. \quad \cdots(4)$

अतः $\vec{t}$ के दिक्कोज्या

$\frac{dx}{d_s}, \frac{dy}{d_s}, \frac{dz}{d_s}$ है।

यदि स्पर्श-रेखा PT पर किसी बिन्दु का स्थिति-सदिश $\vec{R}$ है तो स्पर्श-रेखा का समीकरण है।

$$\vec{R} = r + u \; \vec{t}. \quad \cdots(5)$$

जबकि u एक अदिश-चर राशि है जोकि धन या ऋण है।

P में से होकर जाने वाला और P पर स्पर्श-रेखा के लम्ब समतल

P बिन्दु पर अभिलम्ब समतल (normal plain) कहलाता है। इसका समीकरण।

$$(\vec{R} - r). \; \vec{t} = 0 \text{ है।} \quad \cdots(6)$$

इस समतल में, P में से होकर जाने वाली कोई भी सरल रेखा वक्र को P पर अभिलम्ब होती है।

उदाहरण 1

$r^2 r + (a.r)\, b$ का अवकलन करो।

जबकि a और b दो अचर-सदिश है और सदिश r का मापाक r है, और यह t का फलन है।

$$\frac{d}{dt}\left\{ r^2 r + (a \cdot r)\; b \right\}$$

$$= \frac{d}{dt}\,(r^2 r) + \frac{d}{dt}\{(a.r)\; b\}$$

$$= 2r \frac{dr}{dt} r + r^2\frac{dr}{dt} + (a.r)\frac{db}{dt} +$$

$$\left(a .\frac{dr}{dt} + \frac{da}{dt}.r\right) b.$$

परन्तु $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0.$

$\therefore$ इसका अवकल $= \left(2 r \frac{dr}{dt}\right) r + r^2 \frac{dr}{dt} + \left(a. \frac{dr}{dt}\right) b.$

$$= 2 r\dot{r} \; r + r^2\dot{r} \; + (a \dot{r}$$

उदाहरण 2

प्रक्षेप्य (Projectile) की गति के समीकरण का समाकलन करो। प्रक्षेप्य की गति का समीकरण है।

$$\ddot{r} = \vec{g}. \qquad \cdots(1)$$

समाकलन करने पर

$$\dot{r} = \vec{g} t + b. \qquad \cdots(2)$$

b समाकलन का स्थिराक है जोकि प्रारम्भ में $t = 0$ पर वेग का मान है।

(2) का समाकलन करने पर हमें प्राप्त है

$$r = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + b t + c.$$

जबकि c एक और स्थिराक है जिसका मान $t = 0$, पर प्रक्षेप्य की स्थिति से प्राप्त किया जाता है।

प्रश्नावली १३

1. निम्न व्यञ्जकों का अवकलन करो। r का मापाक r है और वह t का फलन है। शेष राशियां अचर है।

(i) $(\mathbf{a}\,\mathbf{r}+r\mathbf{b})^2$, (ii) $\left(r^2\mathbf{r}+\mathbf{a}\times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$

(iii) $\frac{1}{2}k\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2$. (iv) $\left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}+\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{a}.\mathbf{r}}\ \mathbf{b}\right)$.

(v) $r^2+\frac{1}{r^2}$ ($r^2=\mathbf{r}.\mathbf{r}$, एक अदिश–राशि)

2. निम्न का प्रथम तथा द्वितीय अवकलज ज्ञात करो।

(i) $\left[\mathbf{r}\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]$.

(ii) $\mathbf{r}\times\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.\right)$. [इला०, 65]

3. सिद्ध करो कि अवकल–समीकरण को

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{r},$$

अतिपरवलय (Hyperbola)
$\mathbf{r}=(\sinh t)\,\mathbf{a}+(\cosh t)\,\mathbf{b}$,
संतुष्ट करता है। जबकि a और b स्थिर है।

4. अवकलन करो

$$\frac{\mathbf{r}+\mathbf{a}}{r^2+a^2}\quad \text{और}\quad \frac{\times\mathbf{a}\,\mathbf{r}}{\mathbf{r}.\mathbf{a}}.$$

5. यदि n, a, b स्थिर हैं और $\mathbf{r}=(\cos nt)\,\mathbf{a}+(\sin nt)\,\mathbf{b}$ तो सिद्ध करो कि

(i) $\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}=n\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

(ii) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\ n^2\mathbf{r}=0$.

6. r का मान ज्ञात करो जो निम्न समीकरणों को सतुष्ट करे

(i) $a \times \frac{d^2r}{dt^2} = b.$ $(a.b = 0.)$

(ii) $\frac{d^2r}{dt^2} = a\ t + b.$ (जब $t = 0$, r और $\dot{r}$ शून्य हैं)

7 सिद्ध करो कि यदि एक करण केन्द्रीय-त्वरण के प्रभाव से गतिमान है तो इसके क्षेत्र बनाने की दर एक स्थिराक है।
[सकेत माना इसकी गति का समीकरण है।

$$\ddot{r} = f(r).$$

त्वरण सदिश-त्रिज्या के समांतर है।

$\therefore\ r \times \ddot{r} = 0.$

अब $r \times \ddot{r} = \frac{d}{dt}(r \times \dot{r}).$

अतः $r \times \dot{r} = c$

8 यदि $r \times \ddot{r} = 0$ तो सिद्ध करो कि $r \times \dot{r} = a.$

9. दिया हुआ है कि

$r(t) = 2i - j + k$ जब $t = 2$

$= 4i - 2j + 3k$ जब $t = 3$

तो सिद्ध करो कि

$$\int_2^3 r.\ \frac{dr}{dt}\, dt = 10$$

10 किसी गतिमान कण का समय t पर त्वरण

$e^t\, i + e^{2t}\, j + k$

है तो t समय पर उसका वेग ज्ञात करो
जबकि $t = 0$ पर वेग $i + \frac{1}{2}\, j$ है।

11. किसी सदिश का एक अदिश-चर t के सापेक्ष अवकलन की व्याख्या करो और निम्न सम्बन्ध का अर्थनिर्णय करो

$$\frac{dr}{d_s} = 0,$$

और $\quad r \times \frac{dr}{d_t} = 0$ [बनारस 61]

12. सदिश विधि से किसी वक्र पर गतिमान कण का स्पर्श-रेखीय तथा अभिलम्बीय-त्वरण ज्ञात करो।

[माना स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब की दिशाओं में इकाई-सदिश क्रमशः $\hat{a}$ और $\hat{b}$ हैं और s, एक स्थिर बिन्दु से t समय पर कण की दूरी (चाप) है और ψ स्पर्श-रेखा का x-अक्ष पर झुकाव है तो

वेग $V = v a = \frac{ds}{dt} . a$; त्वरण $= \dot{v}\ a + v\ a$ ...(1)

स्पर्श रेखीय त्वरण = a का गुणांक = $\dot{v}\ a = \frac{d^2s}{dt^2} a$ ...(2)

अब $\dot{a} = \frac{da}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{v}{\rho} . b$

कुल त्वरण $= \dot{v}\ a + \frac{v^2}{\rho}\ b$

$\therefore$ अभिलम्बीय-त्वरण $= \frac{v^2}{p}\ b$ ...(3)

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1

1. $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$; $\overrightarrow{DB} = 3\mathbf{b} - \mathbf{a}$; $\overrightarrow{BC} = 2(\mathbf{a} + \mathbf{b})$;

   $\overrightarrow{CA} = -(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})$

4 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$; $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 16 $3\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$; $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

प्रश्नावली 2

1 $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$; $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$.

6 $15 + \sqrt{61}$

8. $3, 3\sqrt{2}, 3$; $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

प्रश्नावली 3

1. 5 पौं० मा० या दक $\frac{(5\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k})}{\sqrt{2}}$.
2. P पौ. भा. और 2 P पौं. भा.
3. $\sqrt{2}$ F, F परिणामित बल है।
4. $2\,\overrightarrow{OP}$, OP कोने O में से घन का विकर्ण है।
5. एकघाततः स्वतन्त्र
6. $\sqrt{17}$ मी. प्र. घ. पूर्व से $\tan^{-1}\frac{1}{4}$ उत्तर की ओर।

7. $\frac{1}{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

11. $\frac{\sqrt{3}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}}{2}$; $\mathbf{j}\,\frac{1}{2}\,(\mathbf{j}-\sqrt{3}\,\mathbf{i}), -\frac{1}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$;

$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}), \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j})$.

13. $(30-5\sqrt{3})\,\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, 14. $6\frac{1}{4}$ फु. से, 9 फुट,

$1\frac{23}{15}$ से. पश्चात् ।

16. $6\overrightarrow{AG}$, जबकि G षड्भुज का केन्द्रक है ।

प्रश्नावली 4

1. $\mathbf{r}=(1+t)\,\mathbf{i}+2\,(t-1)\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

प्रश्नावली 5

3. $\frac{1}{3}\,(5, 4, 1)$. 4. (21, 8, 2) और (−15, −16, −6)

प्रश्नावली 6

5. (i) $\sin\theta=\sqrt{\frac{2}{7}}$, $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{21}}$,

(ii) $\sin\theta=\frac{\sqrt{185}}{3\sqrt{26}}$, $\cos\theta=\frac{7}{3\sqrt{26}}$.

17. $\cos^{-1}\frac{1}{3}$.

20. $\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}\right)$, $\cos^{-1}\frac{\sqrt{21}}{6}$.

प्रश्नावली 7

5. $6\sqrt{5}$ इकाई 6. $5\sqrt{3}$ इकाई

7. $\sqrt{\frac{5}{21}}$. 8. 20·5 इकाई

प्रश्नावली 8

2. $\frac{5}{9}(-33\,\mathbf{i}+74\mathbf{j}+32\,\mathbf{k}), \frac{-55}{3}, \frac{370}{9}, \frac{160}{9},$
3. $4\sqrt{\frac{91}{10}}$ or $\frac{4}{\sqrt{10}}(1,-3,-9)$.
6. $7(\mathbf{k}-4\mathbf{i}-\mathbf{j})$.
7. 40 इकाई

प्रश्नावली 9

4 -14 6. $p=5$

10 90^0 और 60^0 11. 7 घन इकाई

16 $(-1, 10, 4)$.

प्रश्नावली 10

1. (i) O (ii) $2\,[\mathbf{bdc}]\mathbf{a}$.

3 $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}+\mathbf{k}), \frac{1}{3}(-8\mathbf{i}+3\mathbf{j}-7\mathbf{k}), \frac{1}{3}(-7\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k})$.

प्रश्नावली 11

1. $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=[\mathbf{abc}]$. 2. $2x+17y+8z+36=0$.
4. $\mathbf{r}\cdot(3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k})+13=0$.
5. $\mathbf{r}\cdot(2\mathbf{i}-7\mathbf{j}-13\mathbf{k})=1$.
6. $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k})=0$.
7. $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})+2=0, (2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})$.
9. $\mathbf{r}\cdot(25\mathbf{i}+17\mathbf{j}+62\mathbf{k})=78$ यह उस कोण का समद्विभाजक है जिस मे मूल बिन्दु स्थित है। और $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+35\mathbf{j}-10\mathbf{k})=156$.
10. $\mathbf{r}=\mathbf{c}+t\,\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})]$.
16. $1/\sqrt{6}$, $11x+2y-7z+6=0$ और $7x+y-5z+7=0$ की प्रतिच्छेद रेखा, या $[\mathbf{r}-(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}), 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}, \{(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k})\}$ और $[\mathbf{r}-(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}), 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}, \{(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k})\}]$

17. $\frac{9}{10}$ इकाई (लगभग)

19. $\frac{q_1 - r.\, n_1}{n_1} = \frac{q_2 - r.\, n_2}{n_2} = \frac{q_3 - r.\, n_3}{n_3}.$

20. $\frac{1}{[abc]}\,[b \times c + c \times a + a \times b].$

प्रश्नावली 12

8 $r.\,[r - a\,(i+j+k)] = 0.$

प्रश्नावली 13

1 (i) $2\,(ar + rb)\,(a\dot{r} + r.b).$

(ii) $3\,r^2\,\dot{r}\,r + r^3\,\dot{r} + a \times \ddot{r}$

(iii) $k\;\; r.\;\ddot{r}.$

(iv) $\frac{r}{r^2} - \frac{2\dot{r}\;r}{r^3} - \frac{r\,(a.\dot{r})b}{(a.\dot{r})^2}$

(v) $2r\,\dot{r} - \frac{2\,\dot{r}}{r^3}.$

2. प्रथम अवकलज

$$\left[r\,\frac{dr}{dt}\;\frac{d^3r}{dt^3}\right],\;\frac{dr}{dt} \times \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right) + r \times \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^3r}{dt^3}\right)$$

4. $\frac{\dot{r}}{r^2 + a^2} - \frac{2r\,(r\,\dot{r} + a)}{(r^2+a^2)^2},$

$\frac{\dot{r} \times a}{\dot{r} - a} - \frac{(\dot{r}\,.a)\; r \times a}{(r.a)^2}$

6 (i) $r = \mathcal{L}\, a + d + t\, c + \frac{1}{2}\, t^3\, b \times a/a^2$

जबकि $\mathcal{L}$ एक अदिश है और c समाकलन का स्थिरांक है।

(ii) $\frac{1}{6}\,at^3 + \frac{1}{2}\,b\,t^2.$

10. $e^t\, i + \frac{1}{2}\, e^{2t}\, j + t\, k.$